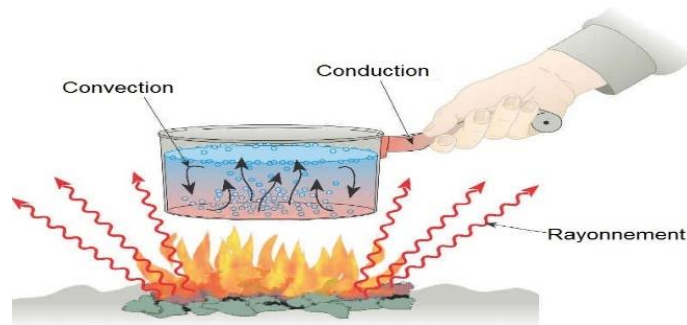


## TRANSFERT DE CHALEUR ET TECHNOLOGIE DE TRANSFERT DE CHALEUR



« Aucun sujet n'a des rapports plus étendus avec les progrès de l'industrie et ceux des sciences naturelles ; car l'action de la chaleur est toujours présente, elle pénètre tous les corps et les espèces, elle influe sur les procédés des arts, et concourt à tous les phénomènes de l'univers »

Joseph Fourier, « Théorie Analytique de la Chaleur », 1822

## SOMMAIRE

|   |    |
|---|----|
| AVANT-PROPOS .....  | 1  |
| CHAPITRE 1 : RAPPELS, DEFINITIONS, ET GENERALITES SUR LE TRANSFERT DE CHALEUR .....     | 2  |
| 1°) Unités - Dimensions .....   | 2  |
| 2°) Chaleur et température .....  | 3  |
| 3°) Chaleur spécifique .....  | 6  |
| 3.1°) Chaleur spécifique massique .....   | 6  |
| 3.2°) Chaleur spécifique molaire .....  | 6  |
| 3.3°) Influence de la température .....   | 7  |
| 3.4°) Influence de la pression et du volume .....                                       | 7  |
| 4°) Changement d'état- chaleurs massiques de transformation .....                       | 8  |
| 4.1°) Fusion et solidification .....  | 8  |
| 4.2°) Vaporisation et condensation .....  | 9  |
| 5°) Relations générales .....   | 11 |
| 6°) Généralités sur le transfert de chaleur .....                                       | 12 |
| 6.1°) Conduction .....  | 12 |
| 6.2°) Convection .....  | 12 |
| 6.3°) Rayonnement .....   | 13 |
| 6.4°) Régime transitoire- régime permanent .....  | 14 |
| 6.5°) Flux de chaleur- densité du flux de chaleur .....                                 | 14 |
| 6.6°) Problème générale de la transmission de chaleur .....                             | 15 |
| 7°) TD série I .....  | 17 |
| CHAPITRE 2 : TRANSFERT THERMIQUE PAR CONDUCTION .....                                   | 18 |
| 1°) Loi de FOURIER .....  | 18 |
| 1-1°) Conductivité thermique .....  | 19 |
| 1-2°) Variation conductivité thermique avec la température .....                        | 20 |
| 2°) Conduction à travers un mur plan homogène .....                                     | 21 |
| 2.1°) Expression du flux de chaleur .....   | 21 |
| 2.2°) Profil des températures à travers le mur .....                                    | 22 |
| 3°) Conduction à travers plusieurs murs plans homogènes, en série .....                 | 23 |
| 4°) Conduction à travers plusieurs murs plans homogènes, en parallèle .....             | 25 |
| 5°) Conduction à travers la paroi d'un tube cylindrique circulaire .....                | 26 |
| 5.1°) Expression du flux de chaleur .....   | 26 |
| 5.2°) Profil radial des températures à travers la paroi du tube .....                   | 27 |
| 5.3°) Expression rapproché du flux de chaleur .....                                     | 27 |
| 6°) Conduction à travers 2 tubes cylindriques concentriques accolés .....               | 28 |
| 7°) Conduction à travers une paroi sphérique .....                                      | 29 |
| 8°) Applications de la conduction à travers une sphère .....                            | 30 |
| 9°) TD série II .....   | 31 |
| CHAPITRE 3 : TRANSMISSION SOLIDE-LIQUIDE. ISOLATION THERMIQUE .....                     | 34 |
| 1°) Flux de chaleur entre deux fluides séparés par un mur plan .....                    | 34 |
| 2°) Isolation thermique d'un mur plan .....   | 35 |
| 3°) Flux de chaleur entre deux fluides séparés par un tube cylindrique circulaire ..... | 35 |
| 4°) Isolation thermique d'un tube cylindrique circulaire .....                          | 37 |

|   |            |
|---|------------|
| 5°) Choix de l'épaisseur d'isolation thermique d'un tube cylindrique circulaire .....     | 38         |
| 6°) En résumé :.....  | 41         |
| 7°) TD SERIE 3.....   | 42         |
| 8°) DEVIS DES MATERIAUX D'ISOLATION THERMIQUE .....                                       | 46         |
| <b>CHAPITRE 4 : REGIME TRANSITOIRE – EQUATION DE L'AILETTE .....</b>                      | <b>50</b>  |
| 1°) BILAN THERMIQUE .....   | 50         |
| Expression des flux d'énergie .....   | 50         |
| 2°) REGIME TRANSITOIRE .....  | 51         |
| Exercice d'application:.....  | 53         |
| 3°) EQUATION DE L'AILETTE :.....  | 54         |
| Choix de l'ailette.....   | 56         |
| 4°) TD SERIE IV.....  | 57         |
| <b>CHAPITRE 5 : TRANSFERT THERMIQUE PAR RAYONNEMENT.....</b>                              | <b>72</b>  |
| 1°) Généralités .....   | 72         |
| 1.1) Définitions relatives à l'émission.....  | 72         |
| 1.2) Définitions relatives à l'absorption.....  | 73         |
| 1.3) Facteur d'émission, facteur d'absorption.....  | 74         |
| 2°) Echange de chaleur entre deux surfaces grises séparées par un milieu transparent..... | 74         |
| 2.1) Expression du flux de chaleur .....  | 75         |
| 2.2) Rôle d'un écran .....  | 76         |
| 3°) Echange thermique entre un gaz et une enceinte isothermes : .....                     | 78         |
| 4°) Coefficient de rayonnement .....  | 79         |
| 5°) Influence des phénomènes de convection et de rayonnement .....                        | 80         |
| 6°) TD SERIE V .....  | 83         |
| <b>CHAPITRE 6 : TRANSFERT THERMIQUE PAR CONVECTION.....</b>                               | <b>88</b>  |
| 1°) Introduction .....  | 88         |
| 2°) Expression du flux de chaleur .....   | 89         |
| 3°) Coefficient de convection, loi de Newton .....  | 90         |
| 4°) Transfert de chaleur sans changement d'état .....                                     | 90         |
| 4.1°) Convection forcée : analyse dimensionnelle .....                                    | 90         |
| 4.1.1) Application de l'analyse dimensionnelle .....                                      | 90         |
| 4.1.2) Expression du coefficient de convection .....                                      | 93         |
| 4.1.3) Modifications à apporter aux formules de $h_c$ pour d'autres conditions .....      | 95         |
| 4.2°) Convection naturelle .....  | 96         |
| 4.2.1) analyse dimensionnelle .....   | 96         |
| 4.2.2) Expression du coefficient de convection .....                                      | 97         |
| 4.2.3) Relations empiriques.....  | 98         |
| 5°) TD SERIE 6.....   | 99         |
| <b>CHAPITRE 7 : LES ECHANGEURS DE CHALEUR.....</b>  | <b>108</b> |
| 1°) Echangeurs tubulaires simples .....   | 108        |
| 1.1°) Généralités .....   | 108        |
| 1.2°) Expression du flux de chaleur.....  | 109        |
| 1.3°) Le coefficient global de transfert de chaleur peut être pris comme constant .....   | 110        |
| 1.3.1°) Fonctionnement à co-courant .....   | 110        |
| 1.3.2°) Fonctionnement à contrecourant.....   | 114        |
| 1.3.3°) Comparaison entre les deux modes de fonctionnement.....                           | 115        |

|  |            |
|--|------------|
| 1.4°) le coefficient global de transfert ne peut pas être considéré comme constant ..... | 115        |
| 1.5°) Efficacité d'un échangeur.....   | 117        |
| 1.5.1°) contre-courant .....   | 117        |
| 1.5.2°) co-courant .....   | 118        |
| <b>2°) Echangeurs à faisceaux complexes .....</b>  | <b>119</b> |
| <b>2.1°) Echangeurs 1-2.....</b>   | <b>119</b> |
| 2.1.1°) Description.....   | 119        |
| 2.1.2°) Expression du flux de chaleur .....  | 121        |
| <b>2.2°) Echangeurs 2-4.....</b>   | <b>122</b> |
| <b>3°) Echangeurs à courants croisés .....</b>   | <b>125</b> |
| <b>4°) Nombre d'unité de transfert (NUT) .....</b>                                       | <b>126</b> |
| 4.1°) Echangeur fonctionnant à contre-courant .....                                      | 126        |
| 4.2°) Echangeur fonctionnant à co-courant .....  | 127        |
| <b>5°) Echangeurs de chaleur à plaques .....</b>   | <b>128</b> |
| <b>6°) TD SERIE 7.....</b>   | <b>129</b> |
| <b>7°) Traitement des eaux des chaudières .....</b>                                      | <b>146</b> |
| <b>8°) Exercices d'application relatifs à l'encrassage.....</b>                          | <b>148</b> |
| <b>9°) Algorigamme de calcul d'un échangeur de chaleur .....</b>                         | <b>151</b> |



## Avant-propos

Les nombreux procédés utilisés dans l'industrie sont le siège d'échange d'énergie. La chaleur est une des nombreuses formes d'énergie d'un système. La thermique s'intéresse au processus de transfert de chaleur dans l'espace et dans le temps. Des connaissances de base sont indispensables au technicien et à l'ingénieur de production ou de développement s'il veut comprendre les phénomènes physiques ou chimiques qu'il observe pour agir sur le procédé étudié et maîtriser ainsi la qualité du produit recherché. Le coût énergétique d'un procédé s'améliore à travers le contenu énergétique du produit final. Que le transfert de chaleur soit nécessaire (fours, coulée, échangeurs, chaudières...) ou subit (chocs thermiques, pertes de chaleur, rayonnement) on comprend bien que la compréhension des mécanismes mis en jeu au cours d'un chauffage ou d'un refroidissement permettront d'améliorer le bilan énergétique du procédé. Dans la pratique, ces transferts de chaleur s'établissent entre deux points de l'espace dont la différence de température est non nulle. Le flux de chaleur transmis au cours de ce transfert doit être maîtrisé et optimisé.

Le présent polycopié est constitué des cours du programme classique, enseigné durant plusieurs années à l'Ecole Supérieure de Technologie de Fès. Cette partie du programme est consacrée aux trois modes du transfert de chaleur; conduction, convection et rayonnement thermique. Actuellement, il est adressé aux étudiants de la première année génie des procédés. Nous espérons qu'il sera d'une grande utilité pour mieux comprendre les principes des trois phénomènes du transfert de la chaleur. Les cours sont enrichis par plusieurs exemples et exercices corrigés.

Le polycopié se limite à sept chapitres, dans le premier chapitre nous présenterons des définitions, des rappels thermodynamiques ainsi que les trois modes de transfert de chaleur de manière générale, avec des exemples relatifs à chaque mode, et dont le but est de présenter les modes de transfert thermique d'une manière simple et facile.

Le deuxième chapitre est consacré à la conduction unidimensionnelle en régime permanent. La transmission solide-liquide et l'isolation thermique avec l'étude de l'optimisation des épaisseurs d'isolants fera l'objet du troisième chapitre.

Pour clôturer les notions relatives au mode de transfert de chaleur par conduction, le quatrième chapitre est consacré à la conduction en régime transitoire (variable). Aussi, le problème de l'ailette est présenté aux étudiants ingénieurs et élèves de la filière génie thermique et énergétique.

Le cinquième chapitre, est consacré à la description du phénomène de rayonnement thermique, en commençant par les définitions préliminaires des différents paramètres relatifs à ce mode pour passer ensuite, aux lois régissant la transmission de la chaleur par rayonnement.

Le sixième chapitre constitue un bref rappel de la convection libre et forcée, puis le développement de l'analyse dimensionnelle conduit aux formules couramment utilisées en convection libre et forcée ainsi que les différents nombres sans dimensions sont présentés.

Le septième et dernier chapitre sera consacré au calcul des échangeurs de chaleur. On commencera par la détermination de la **DTLM** (Différence de Température Logarithmique Moyenne) dans le cas d'un échangeur tubulaire simple (double tube). La notion de l'efficacité est abordée avant de traiter les échangeurs à faisceaux complexes et les échangeurs industriels couramment utilisés dans l'industrie. Le nombre d'unité de transfert est utile pour mesurer les performances du transfert thermique. Un Algorigramme pour le dimensionnement des échangeurs de chaleur sera présenté en dernier lieu, juste après un aperçu sur le traitement des eaux de chaudières.

En fin, nous souhaitons que le lecteur profite largement de ce présent polycopié, en espérant qu'il sera bien satisfait.

## Chapitre 1 : RAPPELS, DEFINITIONS, ET GENERALITES SUR LE TRANSFERT DE CHALEUR

### 1°) Unités - Dimensions

Un système d'unité se compose :

- D'unités fondamentales
- D'unités dérivées ou secondaires

Les unités secondaires se déduisent des unités fondamentales par des relations physiques conduisant à la notion de dimension.

$$[S] = L^2 ; [V] = L^3 ; [u] = LT^{-1} \dots\dots\dots$$

La connaissance de la dimension est importante car elle permet :

- D'effectuer des changements d'unités
- D'éviter des erreurs en vérifiant l'homogénéité des relations

$$\gamma = \Delta u / \Delta t : \quad [\gamma] = \frac{L}{T} = LT^{-2} \quad (m/s^2)$$

$$\text{Reynolds:} \quad Re = \rho u D / \eta ;$$

$$\text{Masse volumique:} \quad \rho = Kg/m^3 ; [\rho] = ML^{-3}$$

$$\text{Vitesse :} \quad u = m/s ; [u] = LT^{-1}$$

$$\text{Diamètre :} \quad D = m ; [D] = L$$

$$\text{viscosité dynamique:} \quad \eta = Kg/ms ; [\eta] = ML^{-1}T^{-1}$$

$$[Re] = \frac{M.L.L.L.T}{L^3.T.M} \quad \text{sans dimension}$$

Le système utilisé généralement est le système international (SI) ou système MKS ou MKSA

| S.I | Mesure                          | Unité | Dimension |
|-----|---------------------------------|-------|-----------|
| M   | Longueur                        | m     | L         |
| K   | Masse                           | Kg    | M         |
| S   | Temps                           | s     | T         |
| A   | Intensité de courant électrique | A     | I         |
| °K  | Température                     | °K    | $\theta$  |
| Q   | Chaleur                         | J     | Q         |

D'autres systèmes peuvent être rencontrés, notamment le système anglo-saxon:

Pond, lb = 0,454 Kg ; Fahrenheit, 1 °C = 1,8 °F; British thermal unit, Btu = 0,252 Kcal...

En thermique: on garde la seconde pour la vitesse et l'accélération et l'heure pour le flux de chaleur en gardant toutes les autres unités (MKH au lieu de MKS).

## 2°) Chaleur et température

La chaleur est une forme d'énergie au même titre que l'énergie cinétique ou l'énergie potentielle.

**Chaleur = énergie thermique (ou calorifique)**

L'unité est le joule dans le système international ; 1 joule

$$1 \text{ joule} = 10^{+7} \text{ ergs}$$

Mais les mesures calorimétriques nous conduisent à utiliser une autre unité (la calorie).

### Définition

La calorie (cal) est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 14,5 à 15,5 °C la température de 1 gramme d'eau sous la pression atmosphérique (1 atm).

$$1 \text{ cal} = 4,1855 \text{ joules}$$

La calorie n'est utilisée que pour les physiciens. En industrie on utilise le Kcal.

Le Kcal se rattache au système international ou MKH.

**La thermie** =  $10^{+6}$  cal se rattache au système MTS (mètre, tonne, seconde)

|             |                      |      | Kcal              | j                |
|-------------|----------------------|------|-------------------|------------------|
| S.I         | joule                | J    | $0,23892.10^{-3}$ | 1                |
| CGS         | calorie              | Cal  | $10^{-3}$         | 4,1855           |
| MKH         | Kcalorie             | kcal | 1                 | $4,1855.10^{+3}$ |
| MTS         | thermie              | Th   | $10^{+3}$         | $4,1855.10^{+6}$ |
| Anglo-saxon | British thermel unit | Btu  | 0,252             | $1,055.10^{+3}$  |

$$\text{Kwh} = ? \text{ Kcal}$$

$$\text{Kwh} = 3600 \text{ kws} = 3600 \text{ kj} = \text{Kcal} .3600/4,18 = 861 \text{ Kcal}$$

$$1 \text{ Kwh} = 861 \text{ Kcal}$$

Le joule peut être défini comme étant :

- Le travail d'une force d'un newton dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction de la force,  $1 \text{ j} = 1 \text{ N.m} = 1 \text{ Kgm}^2\text{s}^{-2}$
- Le travail fournie par un circuit électrique pour faire circuler un courant de 1 ampère à travers une résistance de 1 Ohm pendant une seconde,  $1 \text{ j} = 1 \text{ } \Omega .\text{A}^2 .\text{s} = 1 \text{ w.s}$
- **1 joule est aussi l'énergie fournie par une puissance de 1 watt pendant une seconde,**  
 $1 \text{ j} = \text{w} .\text{s}$



## Température

Les particules sont en perpétuelle agitation. La caractéristique de cette agitation est d'être désordonnée à la fois dans le temps et l'espace. La température Kelvin (ou température absolue) mesure l'énergie cinétique moyenne d'agitation de ces particules.

### Analogie

|  |   |  |
|--|---|--|
| Potentiel (énergie électrique)                                     | → | Température (énergie thermique)                            |
| ≠ de potentiel = propagation ou écoulement des charges électriques | → | ≠ de température = propagation ou écoulement de la chaleur |

**NB. La chaleur se propage toujours du corps chaud vers le corps froid**

Echelle Celsius ou échelle centésimale (degré Celsius) °C

Echelle Kelvin ou échelle absolue (degré Kelvin) °K

$$T_{\text{°K}} = \theta_{\text{°C}} + 273 \quad ; \quad \Delta T_{\text{°K}} = \Delta \theta_{\text{°C}}$$

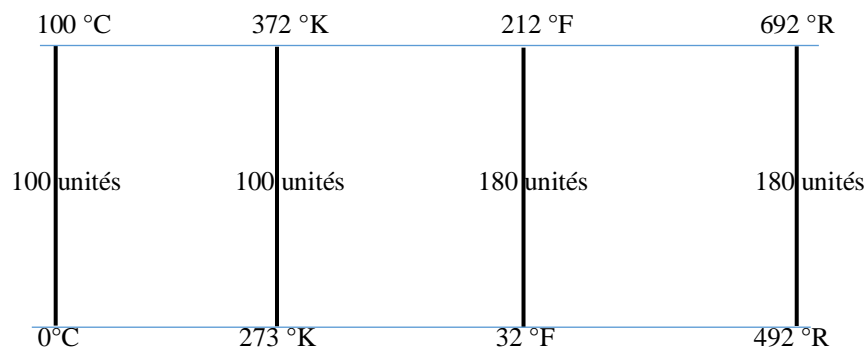
Echelle Fahrenheit (anglo-saxon) (degré Fahrenheit) °F

Echelle Rankine °R ;  $T_{\text{°R}} = \theta_{\text{°F}} + 460$

$$T_{\text{°R}} = 1,8.T_{\text{°K}} = 492 + 1,8.\theta_{\text{°C}} = \theta_{\text{°F}} + 460$$

$$\Delta T_{\text{°R}} = 1,8.\Delta T_{\text{°K}}$$

$$\theta_{\text{°F}} = 1,8.\theta_{\text{°C}} + 32$$



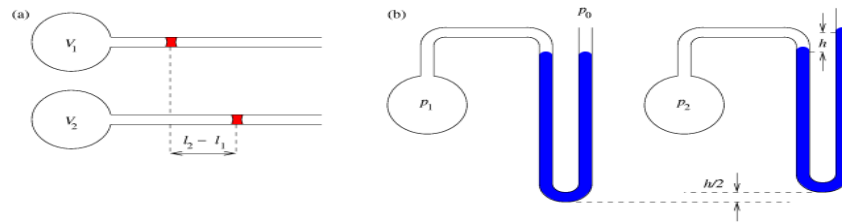
$$40 \text{ °C} = ? \text{ °F}$$

Différents thermomètres sont disponibles pour la mesure de la température:

- Thermomètres à dilatation de fluide (mercure, fluide coloré avec coefficient de dilatation important). Ces thermomètres sont simples, ce sont des tubes de verre très minces remplis d'une petite quantité de liquide. Lorsque le liquide devient plus chaud, il augmente de volume. L'augmentation du volume est donc de la hauteur est directement liée à la température.



- Le thermomètre à gaz est basé sur les variations de pression ou du volume d'un gaz en fonction de la température.



- Thermocouple: est un capteur servant à mesurer la température. Il se compose de deux métaux de natures différentes reliés à une extrémité. Quand la jonction des métaux est chauffée ou refroidie, une tension variable est produite, qui peut être ensuite transcrite en température. Les alliages thermocouple sont généralement disponibles en fils.



- Sonde de platine: Le **thermomètre à résistance de platine** est un dispositif (un type de thermistance) permettant de mesurer la température. Il est basé sur le fait que la résistance électrique du platine varie selon la température.
- **Thermomètre infrarouge** est un instrument de mesure de température de surface d'un objet à partir du rayonnement de type corps noir qu'il émet dans l'infrarouge. On utilise également le terme de **pyromètre infrarouge** lorsqu'il s'agit de mesurer des températures élevées d'un objet ou d'un environnement (four, incendie, volcan, etc.). Un tel thermomètre est parfois appelé thermomètre laser s'il est aidé d'un laser pour viser, ou encore thermomètre sans contact pour souligner sa capacité à mesurer la température à distance, à la différence des thermomètres à contact classiques.



- Etc.....

### 3°) Chaleur spécifique

Nous supposons dans ce qui vient qu'il n'y a pas de changement de d'état au cours des variations des températures considérées.

L'expérience montre que la quantité de chaleur  $Q$  nécessaire à l'échauffement d'un corps est proportionnelle à:

- La quantité de matière du corps
- L'élévation de la température ( $\theta_2 - \theta_1$ )
- Au coefficient de proportionnalité  $c$  appelé, chaleur spécifique du corps ou (capacité thermique spécifique)

#### 3.1°) Chaleur spécifique massique

Si la quantité de matière est repérée par la masse du corps,  $c$ : est la chaleur spécifique massique ou chaleur massique (ou encore capacité thermique massique), dans ce cas:

$$Q = m \cdot c(\theta_2 - \theta_1)$$

$$c = \frac{Q}{m(\theta_2 - \theta_1)} \quad ; \quad \text{kcal/Kg.}^\circ\text{C} \quad ; \quad \text{Kj/Kg.}^\circ\text{C} \quad ; \quad [c] = \frac{Q}{M \cdot \theta}$$

C'est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de  $1^\circ\text{C}$  la température de l'unité de masse du corps.

La chaleur spécifique dépend de l'état physique du corps et de la variation allotropique.

Pour l'eau:

- Glace,  $c = 0,5 \text{ kcal/Kg.}^\circ\text{C}$
- Liquide,  $c = 1 \text{ kcal/Kg.}^\circ\text{C}$
- Vapeur,  $c = 0,45 \text{ kcal/Kg.}^\circ\text{C}$

Pour le carbone:

- Diamant,  $c = 0,147 \text{ kcal/Kg.}^\circ\text{C}$
- Graphite,  $c = 0,202 \text{ kcal/Kg.}^\circ\text{C}$
- Carbone amorphe,  $c = 0,24 \text{ kcal/Kg.}^\circ\text{C}$

#### 3.2°) Chaleur spécifique molaire

Si la quantité de matière est repérée par le nombre de moles  $n$  du corps,  $c$ : est la chaleur spécifique molaire ou chaleur molaire (ou encore capacité thermique molaire), dans ce cas:

$$Q = n \cdot c(\theta_2 - \theta_1)$$

$$c = \frac{Q}{n(\theta_2 - \theta_1)} \quad ; \quad \text{kcal/Kmole.}^\circ\text{C} \quad ; \quad \text{cal/mole.}^\circ\text{C}$$

**Remarque:** En pratique, les quantités de matière sont généralement repérées par leur masse et non par leur nombre de mole. C'est pourquoi, dans la suite, nous supposons toujours que les chaleurs spécifiques sont des chaleurs massiques.

### 3.3\*) Influence de la température

La relation :  $Q = m.c(\theta_2 - \theta_1)$  n'est valable que si la variation de température ( $\theta_2 - \theta_1$ ) est faible, ou si  $c$  peut être considérée comme constante dans cet intervalle de température.

En effet, la chaleur spécifique croît en générale avec la température suivant une loi de la forme:

$$c = a + b\theta + c\theta^2$$

En pratique cependant, on se contente souvent d'une loi linéaire plus simple:

$$c = a + b\theta$$

Dans ce cas, la quantité de chaleur  $dQ$  nécessaire pour élever de  $d\theta$  la température d'une masse  $m$  de corps, de chaleur massique  $c$  est:  $dQ = mcd\theta$

Soit pour une variation de température de  $\theta_1$  à  $\theta_2$ :

$$Q = m \int_{\theta_1}^{\theta_2} cd\theta \quad \text{avec} \quad c = a + b\theta \quad \text{donc} \quad Q = m \int_{\theta_1}^{\theta_2} (a + b\theta)d\theta$$

$$\text{Alors } Q = m. \left[ a + b \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right] (\theta_2 - \theta_1)$$

Or  $\left[ a + b \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right]$  représente la chaleur massique moyenne entre les températures  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

En effet : à la température  $\theta_1$ , la chaleur massique est :  $c_1 = a + b\theta_1$

à la température  $\theta_2$ , la chaleur massique est :  $c_2 = a + b\theta_2$

La chaleur massique moyenne entre les températures  $\theta_1$  et  $\theta_2$  est:

$$c = \frac{c_1 + c_2}{2} = a + b \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2}$$

En reportant cette valeur dans la relation précédente, on obtient une expression identique à celle du paragraphe 3.1

$$Q = m. c (\theta_2 - \theta_1)$$

Généralement dans le calcul des échangeurs de chaleur où la température d'entrée est différente de celle de sortie, on choisit une chaleur massique moyenne:  $c = \frac{c_1 + c_2}{2}$

### 3.4\*) Influence de la pression et du volume

Généralement, les transformations sont effectuées à volume constant ou à pression constante.

Il s'ensuit deux chaleurs spécifiques:

- La chaleur spécifique à volume constant,  $c_v$
- La chaleur spécifique à pression constante,  $c_p$

Cette distinction est particulièrement importante pour les gaz (parce que pour les liquides et surtout les solides, une élévation de température entraîne une faible dilatation donc il en résulte pour ces corps, une chaleur massique à pression constante peu différente de la chaleur massique à volume constant) comme le montre le tableau suivant:

| gaz       | $C_p$ (Kcal/kg°C) | $C_v$ (Kcal/kg°C) |
|-----------|-------------------|-------------------|
| Oxygène   | 0,219             | 0,157             |
| Azote     | 0,247             | 0,176             |
| Hydrogène | 3,432             | 2,440             |
| Air       | 0,237             | 0,169             |

**Remarque:** En pratique, les échauffements s'effectuent presque à pression constante, c'est pourquoi dans la suite et en l'absence d'indication contraire,  $c$  représente la chaleur spécifique à pression constante.

#### 4°) Changement d'état- chaleurs massiques de transformation

Jusqu'à présent, nous avons supposé que toutes les transformations considérées n'entraîneraient pas de changement d'état.

Or, en fournissant suffisamment de chaleur, on peut faire fondre un solide ou faire bouillir un liquide. On dit qu'il y a changement d'état.

##### 4.1°) Fusion et solidification

Le passage d'un corps pur de l'état solide à l'état liquide (fusion) sous l'action de la chaleur et son retour de l'état liquide à l'état solide (solidification) sous l'action du refroidissement sont régis par les lois suivantes:

- Sous une pression déterminée, la fusion et la solidification d'un corps pur commencent toujours à une température bien définie  $\theta_F$ , appelée température (ou point) de fusion.\*
- Pendant toute la durée de la fusion, c'est-à-dire tant qu'on se trouve en présence du liquide provenant de la fusion et du solide non encore fondu, la température du mélange reste constante.

\* C'est un paramètre qualitatif utilisé en cryoscopie

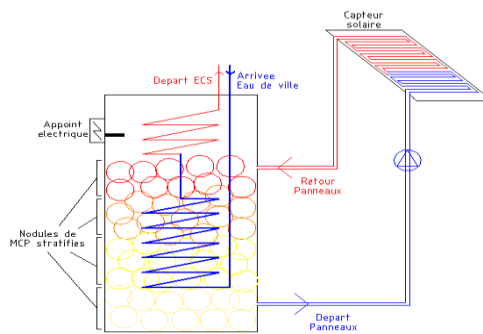
**Définition:** on appelle chaleur massique de fusion (ou chaleur latente de fusion) la quantité de chaleur nécessaire pour faire passer l'unité de masse du corps (1 Kg ou 1g) de l'état solide à l'état liquide, à la température de fusion.\*

La quantité de chaleur  $Q$  nécessaire pour faire fondre une masse  $m$  de corps à la température de fusion est donc:

$$Q = m L_F \quad ; \quad \text{Kcal/Kg ou Kj/Kg}$$

| corps           | Al | eau | benzène | Ag | Pb  |
|-----------------|----|-----|---------|----|-----|
| $L_F$ (Kcal/Kg) | 94 | 80  | 30      | 25 | 5,5 |

\* MCP (matériaux à changement de phase)



#### 4.2\*) Vaporisation et condensation

La vaporisation est le passage de l'état liquide à l'état gazeux. La condensation est le phénomène inverse.

- Sous une pression déterminée, un corps pur commence toujours à bouillir à une même température  $\theta_E$ , appelée température d'ébullition.
- Cette température est telle que la pression de vapeur saturante (PVS)\* du liquide est égale à la pression de l'atmosphère surmontant le liquide.
- La température du liquide reste constante pendant toute la durée de l'ébullition.

**Définition:** on appelle chaleur massique de vaporisation (ou chaleur latente de vaporisation) la quantité de chaleur nécessaire pour faire passer l'unité de masse du corps (1 Kg ou 1g) à la température d'ébullition de l'état liquide à l'état de vapeur\*\*.

La quantité de chaleur **Q** nécessaire pour faire bouillir une masse **m** de corps à la température d'ébullition est donc:

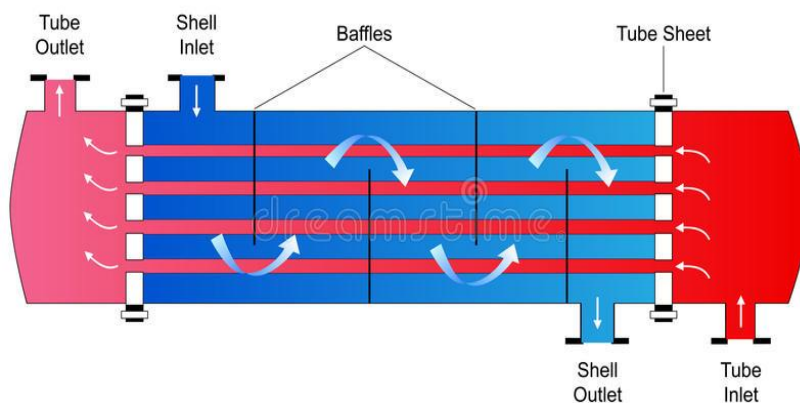
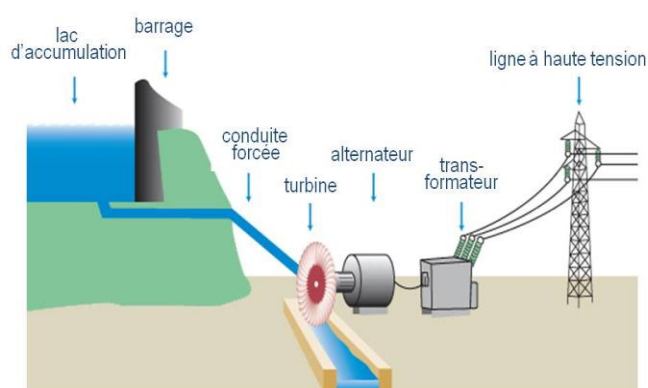
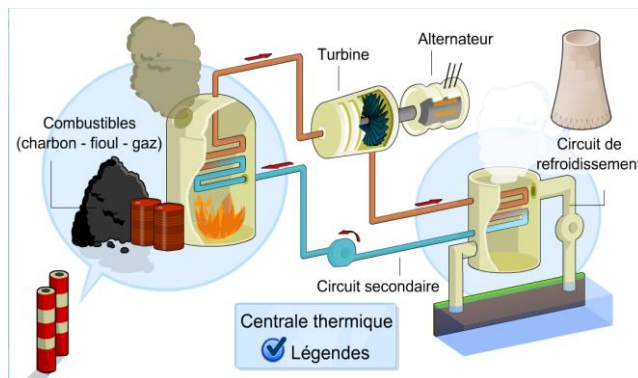
$$Q = m L_V \quad ; \quad \text{Kcal/Kg ou Kj/Kg}$$

\*C'est la pression de vapeur maximale que l'air peut supporter à une température donnée (ici  $\theta_E$ ). La PVS augmente avec la température.  
La pression de vapeur (PV): c'est la pression de vapeur partielle dans l'air. Cette pression est la même que la PVS à la température de rosée.  
Température de rosée: c'est la température à partir de laquelle la vapeur d'eau contenue dans l'air humide commence à se condenser au contact d'une surface froide. (PV = PVS à la température de rosée)

| corps                    | C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH | eau | ammoniac | benzène | Pb  |
|--------------------------|----------------------------------|-----|----------|---------|-----|
| L <sub>V</sub> (Kcal/Kg) | 204                              | 540 | 327      | 94      | 220 |

#### \*\*condenseur

Un **condenseur** est un appareil dont la fonction principale est de liquéfier (ou condenser, transformation d'un gaz en liquide) de la vapeur sur une surface froide, ou via un échangeur thermique maintenu froid par la circulation d'un fluide réfrigérant. La **chaleur latente** du corps est transférée dans le fluide réfrigérant, ce qui consiste en un changement de phase à température constante



## 5°) Relations générales

Nous pouvons maintenant exprimer la quantité de chaleur  $Q$ , nécessaire pour élever la température d'une masse  $m$  d'un corps pur de  $\theta_1$  à  $\theta_2$ . Sachant qu'à la température  $\theta_1$ , le corps est solide, et qu'à la température  $\theta_2$ , le corps est à l'état de vapeur.

Deux cas sont à envisager:

- Les variations des chaleurs spécifiques sont négligeables dans l'intervalle de température considérées:

$$Q = mc_s(\theta_F - \theta_1) + mL_F + mc_L(\theta_E - \theta_F) + mL_V + mc_g(\theta_2 - \theta_E)$$

- Les variations des chaleurs spécifiques ne sont pas négligeables dans l'intervalle de température considérées:

$$Q = m \int_{\theta_1}^{\theta_F} c_s d\theta + mL_F + m \int_{\theta_F}^{\theta_E} c_L d\theta + mL_V + m \int_{\theta_E}^{\theta_2} c_g d\theta$$

Le calcul des intégrales nécessite de connaître la loi de variation de chaque chaleur spécifique avec la température.

$c_s$  : chaleur spécifique du solide  
 $c_L$  : chaleur spécifique du liquide  
 $c_g$  : chaleur spécifique du gaz  
 $L_F$ : chaleur latente de fusion  
 $L_V$ : chaleur latente de vaporisation

### ***Exercice d'application***

*Calculez la quantité de chaleur nécessaire pour élever une masse de 100 g d'eau de  $-20^\circ\text{C}$  à  $120^\circ\text{C}$ . Sachant qu'on suppose que les chaleurs spécifiques sont constantes dans les intervalles de températures considérés.*

### ***Remarque: notion d'enthalpie***

Les quantités de chaleurs mises en jeu pour élever ou abaisser la température des corps à pression constante correspond pour ces corps à des variations d'enthalpie.

L'enthalpie d'un corps représente en effet, l'énergie contenue dans un corps notamment sous forme d'énergie de liaison, d'énergie de pression et d'énergie thermique.

En l'absence de réaction chimique et à pression constante,  $Q$  Kcal fournie à un corps augmente son enthalpie de  $Q$  Kcal et inversement.

Cette notion d'enthalpie est très utile en thermique et notamment pour l'étude des installations industrielles (générateur, échangeurs de chaleur, évaporateurs, condenseurs...)



## 6°) Généralités sur le transfert de chaleur

Le transfert (ou transmission) de chaleur (ou thermique) est un phénomène très général et très important. Il est en effet exceptionnel qu'un ensemble de corps soient en équilibre thermique. Les lois de transmission de la chaleur sont déterminantes pour l'étude de nombreux appareils utilisés dans diverses industries: chaudières, fours, échangeurs de chaleur, évaporateurs, condenseurs, etc....

Ce transfert de chaleur peut s'effectuer de trois façons différentes:

- **Par conduction**
- **Par convection**
- **Par rayonnement**

*\* la chaleur ne peut se transmettre entre deux points que sous l'influence d'une différence de température.*

*\* la chaleur se propage toujours du point le plus chaud vers le point le plus froid.*

### 6.1°) Conduction

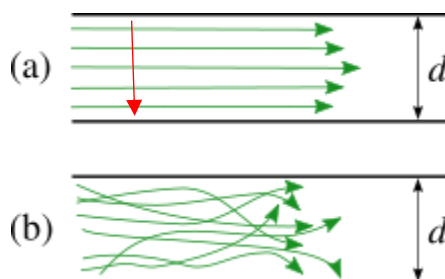
La propagation de la chaleur par conduction consiste en un échange de chaleur (énergie cinétique) entre deux molécules adjacentes dont l'une est à une température plus élevée que l'autre. Ainsi de proche en proche, la chaleur se transmet sans qu'il y ait déplacement des particules de matière.

Exemple: chauffage d'une barre métallique à partir d'une extrémité.

#### Remarque:

*La conduction est le seul moyen possible d'écoulement de la chaleur dans un solide opaque. Dans les fluides, la conduction existe aussi, mais elle est souvent masquée par la convection.*

*Cependant, lorsque l'écoulement d'un fluide est laminaire, la chaleur se déplace par conduction perpendiculairement à la direction du mouvement.*



- a- Régime laminaire
- b- Régime turbulent

### 6.2°) Convection

La convection thermique consiste en une substitution de molécules chaudes par des molécules froides et vice versa.

Exemple: chauffage sur un réchaud de l'eau contenue dans un récipient

La couche inférieure de l'eau qui est en contact directe avec le fond, est chauffée par conduction. Cette eau plus chaude a une densité plus faible que les couches supérieures ; elle va donc s'élever au sein de la masse du liquide en se mélangeant aux couches plus froides. Il

se produit ainsi des courants plus au moins réguliers grâce aux quels, les molécules chaudes qui s'élèvent, sont remplacés par les molécules froides qui descendent et qui s'échauffent à leur tour.

- Il convient de remarquer qu'au cours de sa trajectoire, chaque molécule rencontre constamment d'autres molécules qui sont à des températures différentes de la sienne. Ce qui provoque un échange de chaleur par conduction.
- Il est impossible de distinguer chacun de ces processus. Ce qu'on appelle convection est en fait la superposition de ces deux phénomènes.
- Le transfert de chaleur par convection ne peut concerner que les fluides.

On distingue deux types de convection:

- **La convection libre ou convection naturelle**, lorsque le mouvement des particules les uns par rapport aux autres est spontané, dû uniquement à la différence de densité des particules chaudes et des particules froides. *Exemple: chauffage sur un réchaud de l'eau contenue dans un récipient*
- **La convection forcée**, lorsque le mouvement des particules est dû à une cause extérieure, procédé mécanique par exemple, qui favorise le mélangeage. Utilisation d'agitateur, ventilateur, pompe etc.....

**Remarque:** Lorsqu'on mélange du fluide chaud et un fluide froid, on obtient un fluide à température intermédiaire. On dit que la chaleur s'est transmise par mélangeage ou par contact direct du fluide chaud et du fluide froid. En réalité, ce mélange résulte de l'ensemble des phénomènes de convection et de conduction que l'on vient de décrire sous le nom de convection.

### 6.3\*) Rayonnement

Tout corps opaque ou partiellement opaque et dont la température est supérieure à  $0^{\circ}\text{K}$ , émet de l'énergie dans toutes les directions. Cette énergie est transportée par des radiations ou rayons qui se propagent en l'absence de tout transport de matière.

Ce rayonnement n'est pas chaud en lui-même, mais l'énergie qu'il transporte peut se transformer partiellement ou en totalité en chaleur, dès qu'il atteint un obstacle opaque ou partiellement opaque.

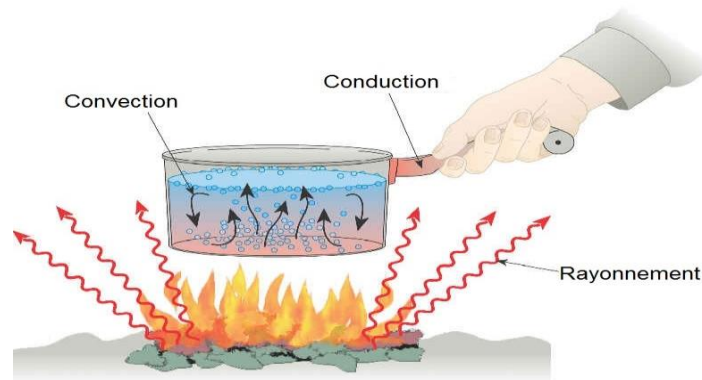
*Un corps parfaitement transparent ne rayonne pas de chaleur et n'en absorbe pas non plus. Cependant, les corps que l'on dit transparents, ne le sont que d'une façon incomplète: l'eau par exemple n'est plus transparente sous une grande épaisseur. D'autre part, certains corps, tel que le verre qui sont transparent pour les rayons lumineux, ne le sont plus pour les rayons IR.*

#### **Remarque:**

*Il convient de ne pas perdre de vue le caractère quelque peu artificiel de cette classification, car dans bien des cas, la transmission de chaleur ne s'effectue pas selon un seul des processus précédents.*

*Par exemple, lorsqu'un radiateur chaud est placé dans une pièce, l'air s'échauffe au contact du radiateur (conduction) puis s'en va (convection). Le radiateur est à une température supérieure à  $0^{\circ}\text{K}$ , donc il rayonne.*

*La quantité totale transférée est alors la somme des quantités de chaleur transmise par conduction, convection et rayonnement. La plus part du temps, cependant, un des phénomènes est prépondérant et les autres peuvent être négligés.*



Dans les chapitres suivants, nous étudierons successivement les lois régissant chacun des trois processus de transfert de chaleur.

#### 6.4\*) Régime transitoire- régime permanent

Supposons par exemple qu'on ouvre un radiateur dans une pièce froide. Au début, la température de l'air s'élève progressivement. En chaque point de la pièce, la température est une fonction du temps: on dit qu'on est en régime transitoire ou variable.

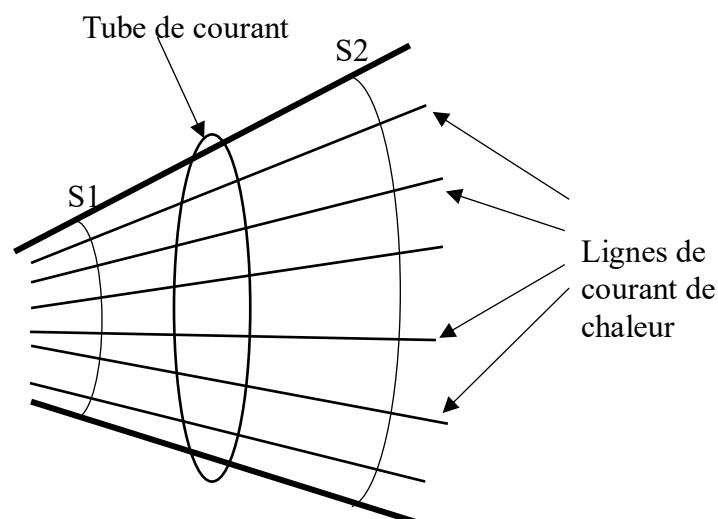
Au bout d'un certain temps, un régime d'équilibre est atteint: la chaleur transmise par le radiateur compense les pertes thermique à travers les murs et les ouvertures (portes et fenêtres) ; la température reste stable en tout point et elle est indépendante du temps. On dit qu'on a atteint le régime permanent.

Dans la suite, nous nous limiterons à l'étude de la transmission de la chaleur en régime permanent.

#### 6.5\*) Flux de chaleur- densité du flux de chaleur

Bien que la chaleur soit une forme d'énergie, la façon dont elle se transmet ressemble beaucoup à la propagation des charges électriques ou à l'écoulement d'un fluide.

On peut ainsi représenter les lignes de courants de chaleur, les surfaces isothermes (normales aux lignes de courant) et les tubes de courant (ensemble de lignes de courant traversant une portion de surface isotherme contenue dans un contour fermé)



**Définition ; On appelle flux thermique: la quantité de chaleur qui s'écoule par unité de temps dans un tube de courant.**

Un flux de chaleur est donc un débit de chaleur.

Si Q est la quantité de chaleur traversant une surface isotherme d'aire S durant un temps t, le **flux de chaleur** correspondant est:

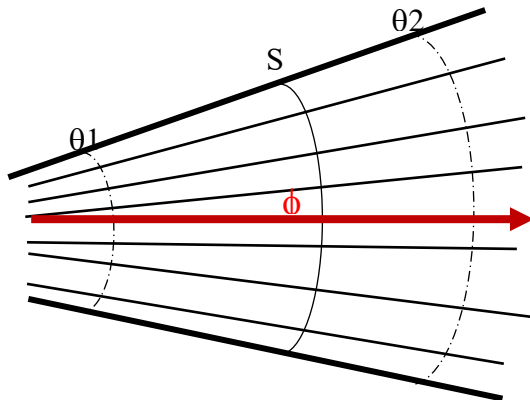
$$\phi = \frac{Q}{t} \quad \text{Kcal/h} \quad \text{ou} \quad \text{w} \quad \text{ou} \quad \text{Btu/h}$$

On définit également la **densité de flux thermique** par le rapport:

$$\rho = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{S.t} \quad \text{Kcal/m}^2\text{h} \quad \text{ou} \quad \text{w/m}^2 \quad \text{ou} \quad \text{Btu/ft}^2.\text{h} \quad (1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m})$$

#### 6.6\*) Problème générale de la transmission de chaleur

Le problème à résoudre en transmission de chaleur, consiste à calculer le flux de chaleur qui circule dans un tube de courant:



Si  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $\theta_1 > \theta_2$ ) sont les températures respectives des surfaces isothermes  $S_1$  et  $S_2$  (généralement situés dans deux milieux différents) du tube de courant, le flux de chaleur qui traverse une section du tube est donné par la relation :

$$\phi = U.S. (\theta_1 - \theta_2)$$

**U: coefficient globale de transfert de chaleur (Kcal/hm<sup>2</sup>°C)**

Tout le problème revient à calculer U en précisant bien (lorsque ce n'est pas évident) à quelle surface S il se rapporte.

### *Analogie électrique*

La relation précédente est analogue à la loi d'Ohm. En effet, l'intensité qui parcourt un tube de courant de résistance électrique  $R$  entre deux sections dont les potentiels respectifs sont  $v_1$  et  $v_2$  est donné par la relation:  $I = \frac{1}{R}(v_1 - v_2)$

$$v_1 - v_2 = I \cdot R$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \phi \cdot \frac{1}{U.S}$$

Par analogie  $\frac{1}{U.S}$  : est la résistance thermique

$$R = \frac{1}{U.S} = (\theta_1 - \theta_2) / \phi$$

*Comme nous le verrons dans la suite, cette notion de résistance thermique est très utile et très fréquemment employée en transfert de chaleur.*

## 7°) TD série I

**I-1°)** Quelle est la correspondance entre le kwh et le Kcal ?

**I-2°)** Exprimer le °C en °F.  $40\text{ °C} = ?\text{ °F}$

**I-3°)** La conductivité thermique est exprimée en Kcal/h.m.°C en MKH. Quelle est la correspondance en Btu/ft.h.°F?

**I-4°)** On introduit dans un calorimètre 400 g d'eau à 20°C et 600 g de laiton à 70 °C. En supposant que la chaleur transmise par le laiton est intégralement transmise à l'eau, calculez la température finale du mélange. Chaleur massique du laiton = 0,093 cal/g.°C.

**I-5°)** Quelle quantité de chaleur faut-il fournir à une masse de 100 g d'eau (glace) à -10 °C pour la transformer en vapeur à - 120 °C sous 1 bar?

$$C_s = 0.5 \text{ Kcal / Kg. } ^\circ\text{C} \quad C_l = 1 \text{ Kcal / Kg. } ^\circ\text{C} \quad C_{\text{vap}} = 0.45 \text{ Kcal / Kg. } ^\circ\text{C}$$

$$L_f = 80 \text{ Kcal / Kg} \quad L_v = 540 \text{ Kcal / Kg}$$

**I-1°)**  $\text{Kwh} = \text{K(w)s}3600 = \text{K(j/s)s}3600 = \text{Kcal}3600/4,18 = 861,24 \text{ Kcal}$

**I-2°)**  $40\text{ °C} = 32 + 1,8.40 = 104\text{ °F}$

**I-3°)**  $1 \text{ BTU} = 0,252 \text{ Kcal} ; 1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m} \quad 1^\circ\text{F} = 1/1,8\text{ °C}$

$$\text{Btu/ft.h.}^\circ\text{F} = \frac{0,252 \text{ Kcal}}{0,3048 \text{ m} \cdot 1 \text{ h} \cdot \frac{1^\circ\text{C}}{1,8}} = \mathbf{1,488 \text{ Kcal/mh}^\circ\text{C}}$$

**I-4°)**  $\theta_1$  : température de l'eau ;  $\theta_2$  : température du laiton

$$m_1 c_1 (\theta_f - \theta_1) = m_2 c_2 (\theta_2 - \theta_f)$$

$$400.1 (\theta_f - 20) = 600.0,093(70 - \theta_f) \quad ; \quad \theta_f = \mathbf{26,1\text{ °C}}$$

**I-5°)**  $Q = m[ C_s(\theta_F - \theta_g) + L_f + C_l(\theta_E - \theta_F) + L_v + C_{\text{vap}}(\theta_{\text{vap}} - \theta_E)]$

$$Q = 0,1[0,5(0 + 10) + 80 + 1(100 - 0) + 540(120 - 100)]$$

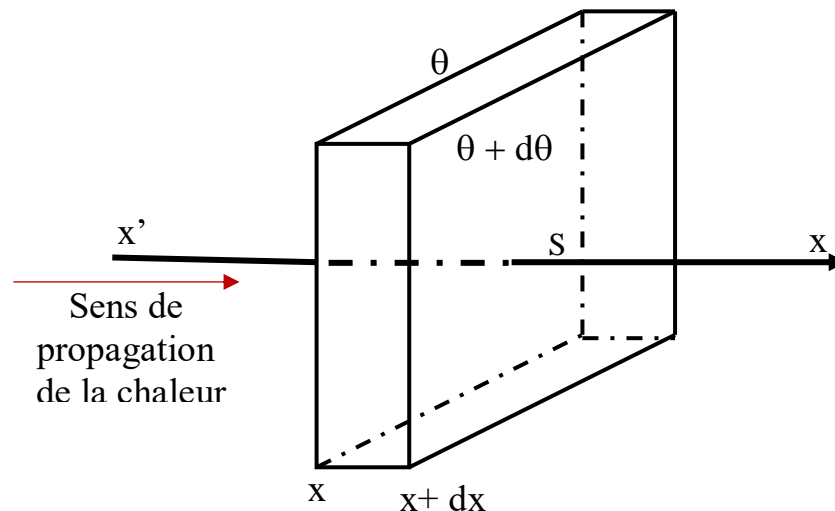
$$\mathbf{Q = 73,4 \text{ Kcal}}$$

## Chapitre 2 : TRANSFERT THERMIQUE PAR CONDUCTION

Le transfert de chaleur par conduction s'effectue suivant la loi de FOURIER.

### 1°) Loi de FOURIER

Soit un corps solide, homogène et isotrope (c'est-à-dire ayant des propriétés identiques dans toutes les directions de l'espace) à travers lequel passe un courant unidirectionnel de chaleur.



Découpons dans ce milieu, perpendiculairement à la direction  $x'x$  de propagation de la chaleur, une petite couche d'épaisseur  $dx$  et d'aire  $S$ .

Les 2 faces de cette couche sont isothermes: la première est à la température  $\theta$  et la seconde à la température  $\theta + d\theta$ .

$\frac{d\theta}{dx}$ : représente le gradient de température, c'est-à-dire l'accroissement (algébrique) de la température par unité de longueur, lorsqu'on se déplace dans la direction de propagation de la chaleur.

### Loi de FOURIER

La densité de flux de chaleur traversant la couche est proportionnelle au gradient de température:

$$\rho = -\lambda \frac{d\theta}{dx}$$

Le coefficient de proportionnalité  $\lambda$  est la conductivité thermique du matériau constituant la couche.

$\lambda$  est positif par définition.

Le signe moins, placé devant le second membre, correspond au fait que la chaleur se propage dans le sens des températures décroissantes. La différence de température  $d\theta$  est donc négatif,  $\frac{d\theta}{dx}$  également, et part suite grâce au signe moins,  $\rho$  est positif.

Le flux de chaleur à travers la couche plane, d'aire  $S$  est:

$$\phi = S \cdot \rho = - \lambda \cdot S \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

### ***1-1°) Conductivité thermique***

La relation précédente nous permet d'écrire :

$$\lambda = - \frac{Q}{S} \cdot \frac{dx}{d\theta} \quad ; \quad \text{Kcal/h.m.}^\circ\text{C} \quad \text{ou} \quad \text{w/m.}^\circ\text{C} \quad \text{ou encore} \quad \text{Btu/ft.h.}^\circ\text{F}$$

$$[\lambda] = Q/LT\theta$$

Sur le tableau suivant on constate que parmi les solides, les métaux sont plus conducteurs que les non métalliques à l'exception du graphite (100 Kcal/hm°C) utilisé dans certains échangeurs de chaleur tel que le refroidissement lors de la production de l'acide chlorhydrique.

L'acier inoxydable est moins conducteur que la plus part des autres métaux et alliages.

Les matériaux non métalliques généralement utilisé comme isolants, comme la laine de verre (0,04) ou encore les polyesters (0,18).

Parmi les liquides, le mercure se détache nettement (7,3 Kcal/hm°C). Les métaux fondus sont de bons conducteurs (on utilise notamment le sodium fondu pour le refroidissement des réacteurs nucléaires).

Mise à part les métaux fondus, la conductivité thermique des solides est supérieure à celles des liquides, elles même supérieures à celles des gaz.



**Conductivité thermique de quelques substances (Kcal/h.m. °C)**

| Métaux et alliages (à la température ambiante)      |      |                                      |       |
|---|------|--------------------------------------|-------|
| Argent à 99,9%                                      | 368  | Acier doux                           | 40    |
| Aluminium à 99%                                     | 175  | Acier inoxydable (Cr 18%- Ni 8%)     | 14    |
| Cuivre à 99,9%                                      | 333  | Laiton (Cu 70%- Zn 30%)              | 85    |
| Etain   | 53   | Constantan (Cu 60%- Zn 40%)          | 20    |
| Fer pur   | 73   | Bronze                               | 163   |
| Zinc  | 96   | Fonte                                | 45    |
| Nickel pur  | 53   | Titane                               | 18    |
| Solides non métalliques (à la température ambiante) |      |                                      |       |
| Béton plein   | 0,14 | Grés                                 | 1,57  |
| Bois de sapin                                       | 0,33 | Liège                                | 0,04  |
| Briques de terre cuite                              | 1,07 | Polyesters                           | 0,18  |
| Verre courant                                       | 0,6  | Polyvinyles                          | 0,14  |
| Verre pyrex   | 1    | Laine de verre                       | 0,04  |
| Plâtre d'enduit                                     | 0,37 | Asphalte                             | 0,06  |
| Electrographite                                     | 100  | Silice                               | 1,15  |
| Liquides  |      | Gaz (à 0°C et sous pression normale) |       |
| Fréon 12 à - 30°C                                   | 0,08 | Air                                  | 0,021 |
| Benzène à 30 °C                                     | 0,14 | Azote                                | 0,021 |
| Eau à 100°C   | 0,58 | Hydrogène                            | 0,150 |
| Mercure à 20 °C                                     | 7,3  | Oxygène                              | 0,021 |
| Sodium à 200°C                                      | 70   | ammoniac                             | 0,019 |

**1-2\*) Variation conductivité thermique avec la température**

La conductivité thermique varie avec la température. Pour les solides, on peut admettre, en première approximation, que la cette variation est linéaire:

$$\lambda = \lambda_0 (1 + a\theta)$$

$\lambda_0$  est la conductivité thermique à 0°C et  $\lambda$  la conductivité thermique à  $\theta$ °C.

$a$  est une constante appelé coefficient de température du solide considéré. Cette constante est positive pour de nombreux matériaux isolants, elle est négative pour la plus part des métaux et alliages à l'exception de l'aluminium et du laiton.

Le graphite possède un coefficient de température positif entre 273 et 0°C, et négatif entre 0°C et 2000 °C.

$a > 0$  c'est-à-dire que la conductivité thermique augmente quand la température s'élève.

$a < 0$  c'est-à-dire que la conductivité thermique diminue quand la température s'élève.

La conductivité des liquides diminue pour la plus part d'entre eux (à l'exception de l'eau et du glycérol ou encore l'éthylène glycol\*) lorsque la température s'élève.

\*L'éthylène glycol est surtout connu et employé en tant qu'antigel et fluide réfrigérant. Son point de fusion étant bas, il a aussi été utilisé comme dégivrant pour les pare-brise.

Pour les gaz la conductivité thermique augmente quand la température s'élève.

En pratique, on utilise souvent une valeur moyenne de la conductivité thermique entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

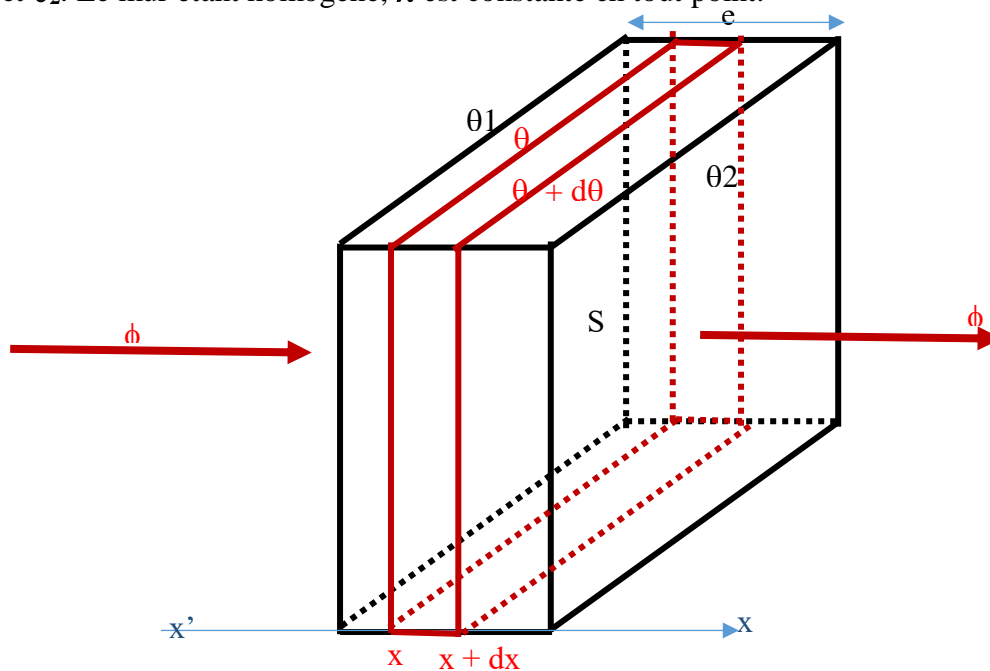
On obtient par la moyenne arithmétique:  $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  étant respectivement les valeurs de la conductivité thermiques à  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .  $\lambda$  est alors indépendante de la température et les relations sont simplifiées.

## 2°) Conduction à travers un mur plan homogène

Soit un mur plan homogène, d'aire  $S$  et d'épaisseur  $e$ . l'une des faces est à la température  $\theta_1$  et l'autre à la température  $\theta_2$ .

Soit  $\lambda$  la conductivité thermique moyenne du matériau constituant le mur, entre les températures  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Le mur étant homogène,  $\lambda$  est constante en tout point.



### 2.1°) Expression du flux de chaleur

\* Si  $\theta_1$  supérieure à  $\theta_2$  un flux de chaleur s'écoule par conduction à travers le mur de la face 1 vers la face 2.

\* On suppose le régime permanent bien établi avec aucune perte de chaleur par les faces latérales du mur.

\* Les lignes d'écoulement de chaleur sont rectilignes et perpendiculaires aux faces 1 et 2.

\* Les faces latérales du mur limitent un tube de courant et la loi de conservation de la chaleur nous permet d'écrire les égalités suivantes:

***Le flux de chaleur entrant par la face 1 = flux de chaleur traversant toute section intérieure parallèle aux faces 1 et 2 = flux de chaleur sortant par la face 2.***

En particulier, à une distance  $x$  de la face 1, le flux de chaleur traversant par conduction une mince paroi d'épaisseur  $dx$  et dont les faces sont respectivement aux températures  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ , est donné par la loi de FOURIER:

$$\phi = -\lambda S \frac{d\theta}{dx}$$

$\phi$ ,  $\lambda$  et  $S$  étant constant, cette équation s'intègre entre les deux faces.

$$\phi \cdot dx = -\lambda \cdot S \cdot d\theta \qquad \phi \int_0^e dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$$

D'où l'expression du flux de chaleur:

$$\phi = \lambda \cdot \frac{S}{e} \cdot (\theta_1 - \theta_2) \quad \text{w ou kcal/h}$$

La densité du flux de chaleur:

$$\rho = \phi/S = \frac{\lambda}{e} \cdot (\theta_1 - \theta_2) \quad \text{w/m}^2 \text{ ou kcal/h.m}^2$$

La résistance thermique:

$$R = \frac{e}{\lambda S} \quad \text{°C.h/kcal. ou °C/w}$$

### 2.2\*) Profil des températures à travers le mur

Toutes section droite d'abscisse  $x$  et parallèle aux faces est une surface isotherme. Reprenant l'expression de la loi de FOURIER:

$$\phi \cdot dx = -\lambda \cdot S \cdot d\theta$$

Intégrons cette équation entre la face 1 et une section d'abscisse  $x$  à la température  $\theta$ :

$$\phi \int_0^x dx = -\lambda \cdot S \int_{\theta_1}^{\theta} d\theta$$

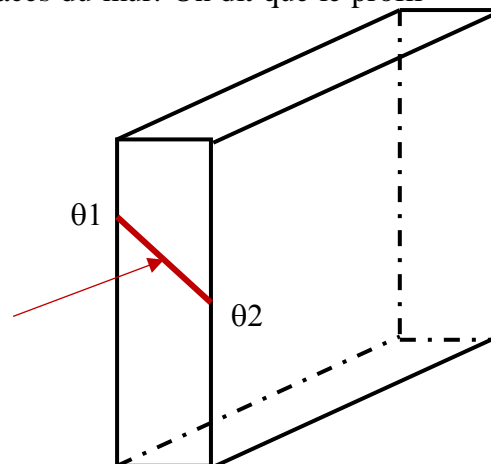
Soit: 
$$\theta = \theta_1 - \frac{\phi}{S\lambda} \cdot x$$

La température diminue linéairement avec  $x$  entre les deux faces du mur. On dit que le profil de température est linéaire.

La pente de la droite représentant le profil de température et d'autant plus grande que la valeur de  $\lambda$  est plus petite.

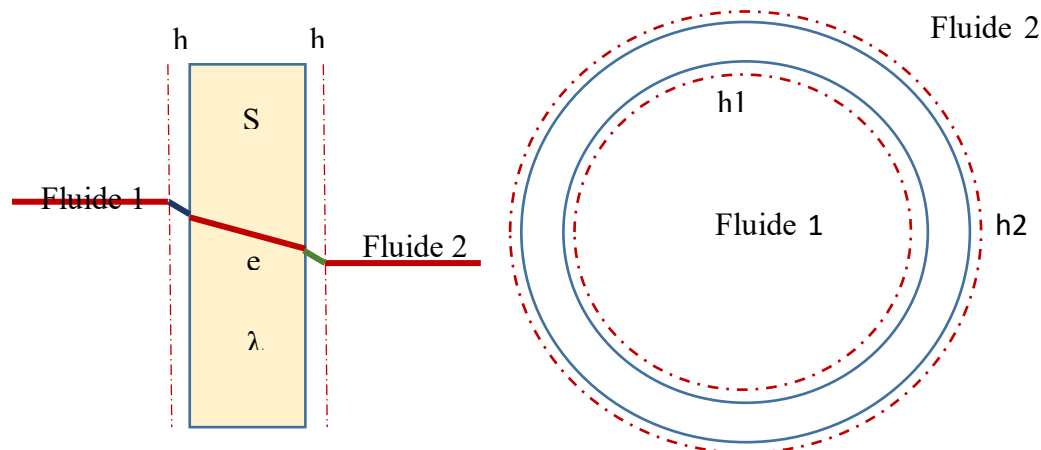
Pour un mur d'épaisseur donnée, la chute de température ( $\theta_1 - \theta_2$ ) est d'autant plus grande que la conductivité thermique est du matériau constituant le mur est petite.

pente



**Remarque:**  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les températures des surfaces elles-mêmes, leur repérage est délicat, car dès que l'on s'écarte un peu de la paroi vers l'extérieur, la température peut varier beaucoup.

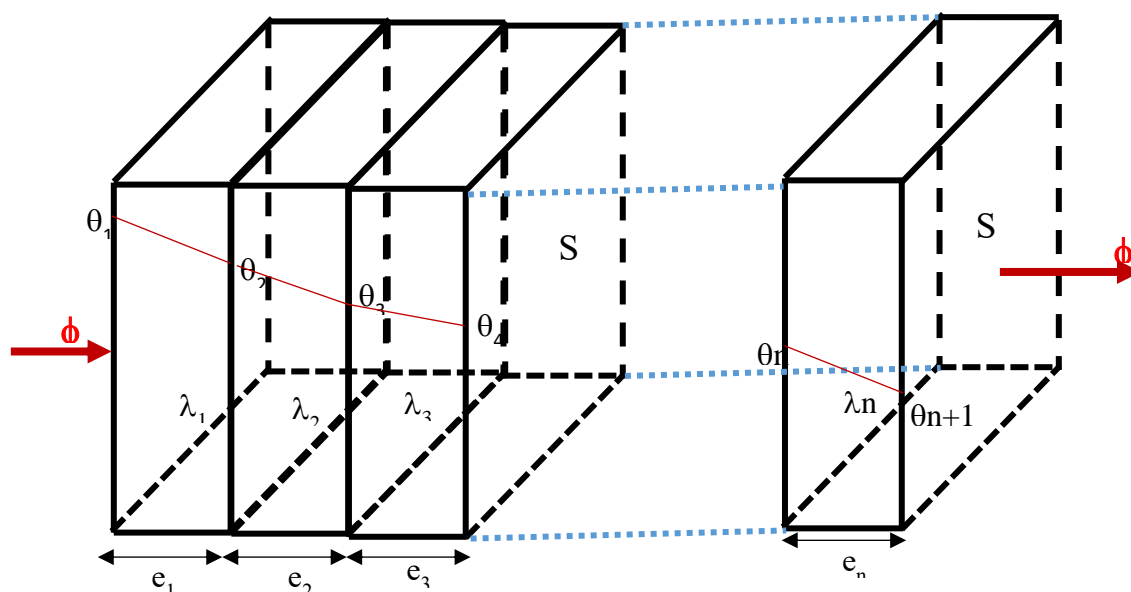
En réalité le calcul de la conduction dans ce chapitre ne tient pas compte des phénomènes de convection et de rayonnement. Par la suite on devra tenir compte de ces deux phénomènes s'ils ne sont pas négligeables. Dans ce cas on introduira la notion du coefficient de transmission solide-fluide.



$h_1$  et  $h_2$  sont les coefficients de transmission fluide-solide

### 3°) Conduction à travers plusieurs murs plans homogènes, en série

Considérons plusieurs murs limités par des plans parallèles constitués par des matériaux de conductivités différentes, mais en contact parfait. Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_n$ , les conductivités thermiques moyennes de chaque mur dont les épaisseurs sont respectivement  $e_1, e_2, e_3, e_n$ . On suppose comme précédemment qu'il n'y a pas de pertes de chaleur latérales. Dans ce cas un cylindre de section  $S$  dont les génératrices sont perpendiculaire aux faces des murs, constitue un tube de courant à l'intérieur duquel s'écoule un flux de chaleur. Chaque mur est donc traversé par le même flux thermique  $\phi$ .



D'après les résultats du paragraphe précédent, on peut écrire:

$$\text{Pour le premier mur ; } \phi = \lambda_1 \cdot \frac{S}{e_1} (\theta_1 - \theta_2)$$

$$\text{Pour le deuxième mur ; } \phi = \lambda_2 \cdot \frac{S}{e_2} (\theta_2 - \theta_3)$$

$$\text{Pour le troisième mur ; } \phi = \lambda_3 \cdot \frac{S}{e_3} (\theta_3 - \theta_4)$$

$$\text{Pour le nième mur ; } \phi = \lambda_n \cdot \frac{S}{e_n} (\theta_n - \theta_{n+1}) \text{ s'il y avait n murs}$$

Tirons les différences des températures de ces relations:

$$(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\phi}{S} \cdot \frac{e_1}{\lambda_1}$$

$$(\theta_2 - \theta_3) = \frac{\phi}{S} \cdot \frac{e_2}{\lambda_2}$$

$$(\theta_3 - \theta_4) = \frac{\phi}{S} \cdot \frac{e_3}{\lambda_3}$$

$$(\theta_n - \theta_{n+1}) = \frac{\phi}{S} \cdot \frac{e_n}{\lambda_n}$$

En additionnant membre à membre:

$$\theta_1 - \theta_{n+1} = \frac{\phi}{S} [e_1/\lambda_1 + e_2/\lambda_2 + e_3/\lambda_3 + e_n/\lambda_n]$$

D'où le flux thermique:

$$\phi = S \cdot \left[ \frac{1}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3} + \frac{e_n}{\lambda_n}} \right] \cdot (\theta_1 - \theta_{n+1})$$

Résistance thermique équivalente:

$$\phi = \left[ \frac{1}{\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \frac{e_n}{\lambda_n S}} \right] \cdot (\theta_1 - \theta_{n+1})$$

On voit apparaître la résistance thermique de chacun des murs:

$$R_1 = \frac{e_1}{\lambda_1 S} \quad ; \quad R_2 = \frac{e_2}{\lambda_2 S} \quad ; \quad R_3 = \frac{e_3}{\lambda_3 S} \quad ; \quad R_n = \frac{e_n}{\lambda_n S}$$

Ces résistances sont placées en série et leur somme constitue la résistance thermique équivalente de n murs accolés:

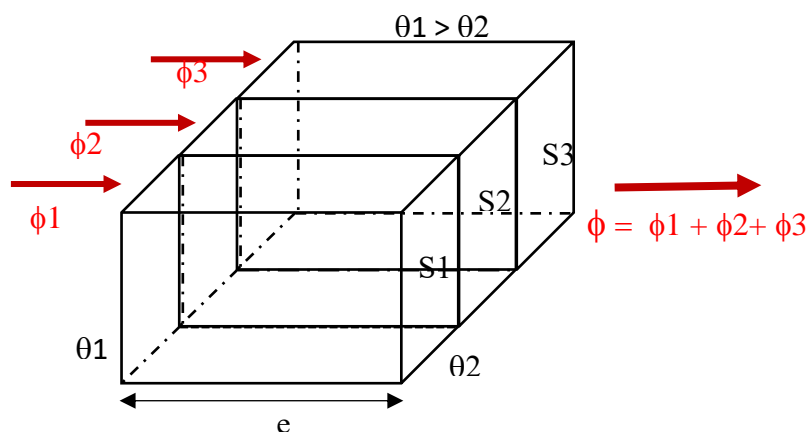
$$\Sigma R = R_1 + R_2 + R_3 + R_n = \left[ \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \frac{e_n}{\lambda_n S} \right]$$

$$\phi = (\theta_1 - \theta_{n+1}) / \Sigma R$$

**Remarque:** ces relations supposent qu'il n'existe pas d'autres résistances thermiques que celles qui y figurent. Il est donc nécessaire qu'il y ait contact thermique parfait entre les murs successifs. Si le contact n'est pas parfait il existera par exemple une mince lame de gaz entre deux murs, cette lame même très mince introduit une résistance supplémentaire considérable, car la conductivité thermique des gaz est très faible.

#### 4°) Conduction à travers plusieurs murs plans homogènes, en parallèle

Supposons maintenant différents éléments solides juxtaposés par bandes, les un à côté des autres, et que la température soit uniforme sur chacune de leurs 2 faces. La différence de température ( $\theta_1 - \theta_2$ ) est donc la même pour chacun des éléments traversés respectivement par les flux thermiques  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$



Si  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  représentent les résistances thermiques de chacun:

$$\phi_1 = (\theta_1 - \theta_2)/R_1 \quad ; \quad \phi_2 = (\theta_1 - \theta_2)/R_2 \quad ; \quad \phi_3 = (\theta_1 - \theta_2)/R_3$$

**Le flux thermique total est:**  $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = (\theta_1 - \theta_2)/\Sigma R$

Avec  $1/\Sigma R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3$

Les résistances thermiques  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  de chacun des éléments sont en parallèles et  $\Sigma R$  est la résistance équivalente.

Les éléments ont la même épaisseur  $e$ :

$$R_1 = \frac{e}{\lambda_1.S_1} \quad ; \quad R_2 = \frac{e}{\lambda_2.S_2} \quad ; \quad R_3 = \frac{e}{\lambda_3.S_3}$$

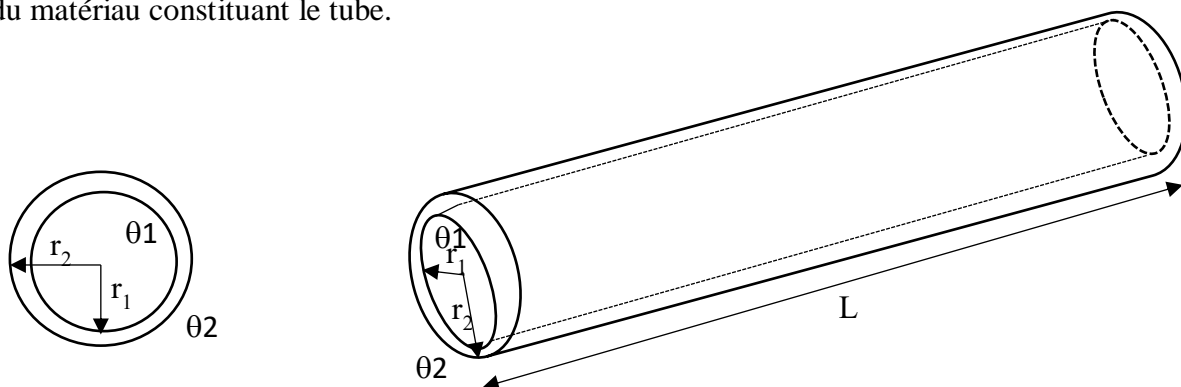
**En résumé, comme en électricité:**

- Si les résistances thermiques sont en série, la résistance équivalente est égale à leur somme.
- Si les résistances thermiques sont en parallèle, l'inverse de la résistance équivalente est égal à la somme des inverses des résistances.

### 5°) Conduction à travers la paroi d'un tube cylindrique circulaire

Considérons un tube cylindrique circulaire.

Soient  $r_1 = D_1/2$  le rayon de la paroi interne,  $r_2 = D_2/2$ , celui de la paroi externe,  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , les températures des faces interne et externe et  $\lambda$  la conductivité thermique moyenne entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  du matériau constituant le tube.



#### 5.1°) Expression du flux de chaleur

On désire connaître le flux de chaleur qui traverse la paroi du tube de l'intérieur vers l'extérieur (lorsque  $\theta_1 > \theta_2$ ) pour une longueur  $L$  du tube.

Pour des raisons de symétrie, les lignes d'écoulement de chaleur, sont des droites dirigées selon les rayons. On dit que le transfert de chaleur est radial.

Considérons un cylindre de rayon intermédiaire  $r$  compris entre  $r_1$  et  $r_2$  et d'épaisseur  $dr$ .

La densité du flux de chaleur à travers la paroi du cylindre est donnée par la loi de FOURIER:

$$\rho = -\lambda \frac{d\theta}{dr}$$

Le flux de chaleur correspondant est:

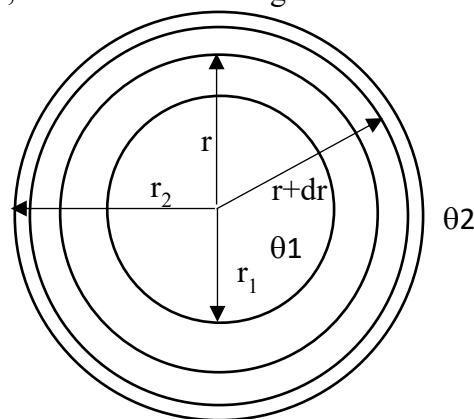
$$\phi = -\lambda \cdot S \frac{d\theta}{dr}$$

$S$  étant l'aire de la surface latérale du cylindre de rayon  $r$  et de longueur  $L$ , soit:

$$S = 2\pi rL \quad \text{d'où:} \quad \phi = -\lambda 2\pi rL \frac{d\theta}{dr}$$

D'après la loi de conservation de la chaleur et le régime permanent, le flux thermique est constant à travers tout cylindre coaxial de rayon  $r$  compris entre  $r_1$  et  $r_2$ .

L'équation précédente peut s'intégrer de l'intérieur à l'extérieur du cylindre de la manière suivante:



$$d\theta = \frac{-\varnothing}{2.\pi.L.\lambda} \cdot \frac{dr}{r}$$

$$\text{Soit: } \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \frac{-\varnothing}{2.\pi.L.\lambda} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

$$(\theta_1 - \theta_2) = \frac{-\varnothing}{2.\pi.L.\lambda} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$\phi = \frac{2.\pi.L.\lambda}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} (\theta_1 - \theta_2)$$

La densité du flux de chaleur:

Il est nécessaire de définir à quelle surface on la rapporte:

$$\text{Si c'est la surface interne du tube: } S_1 = 2\pi r_1 L \quad \rho_1 = \phi/S_1 \text{ donc } \rho_1 = \frac{\lambda}{r_1 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} (\theta_1 - \theta_2)$$

$$\text{Si c'est la surface externe du tube: } S_2 = 2\pi r_2 L \quad \rho_2 = \phi/S_2 \text{ donc } \rho_2 = \frac{\lambda}{r_2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} (\theta_1 - \theta_2)$$

La résistance thermique du tube:

$$\mathbf{R} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2.\pi.L.\lambda} \quad \text{ou} \quad \mathbf{R} = \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2.\pi.L.\lambda}$$

### 5.2\*) Profil radial des températures à travers la paroi du tube

Chaque cylindre concentrique constitue une surface isotherme. On peut donc parler de profil radial de température.

$$\text{Effectuons l'intégration de l'expression: } d\theta = \frac{-\varnothing}{2.\pi.L.\lambda} \cdot \frac{dr}{r}$$

entre la face interne du tube de rayon  $r_1$  et un cylindre de rayon  $r$  ( $r_1 < r < r_2$ ) à la température  $\theta$ :

$$\int_{\theta_1}^{\theta} d\theta = \frac{-\varnothing}{2.\pi.L.\lambda} \cdot \int_{r_1}^r \frac{dr}{r}$$

$$\theta = \theta_1 - \frac{\varnothing}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r}{r_1}$$

Cette expression montre que, le long d'un rayon, la température décroît de  $\theta_1$  à  $\theta_2$  selon une loi logarithmique.

Le profil radial des températures n'est pas linéaire.

### 5.3\*) Expression rapproché du flux de chaleur

Il y a plusieurs manière de définir la moyenne de deux grandeurs  $a$  et  $b$ :

- moyenne arithmétique :  $a_{ma} = (a + b)/2$
- moyenne géométrique :  $a_{mg} = \sqrt{a \cdot b}$
- moyenne harmonique :  $1/a_{mh} = 1/a + 1/b$
- moyenne logarithmique :  $a_{ml} = \frac{a-b}{\ln \frac{a}{b}}$



Ces différentes moyennes sont assez proches les unes des autres. En particulier, pour  $(a/b) < 2$ , (cas des échangeurs de chaleur)  $a_{ma} \approx a_{ml}$ . L'erreur relative ainsi commise en assimilant  $a_{ma}$  à  $a_{ml}$  est au plus de 4% lorsque  $a = 2b$ .

Si  $a = 2b$  ;  $a_{ma} = 1,5 b$  et  $a_{ml} = 1,4426 b$ ; L'erreur relative est inférieure à 4%

Appliquons cette approximation aux rayons  $r_1$  et  $r_2$ :

$$r_{ml} = \frac{r_2 - r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \approx \frac{r_2 + r_1}{2} = r_{ma} \quad \text{d'où} \quad \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_2 - r_1}{\frac{r_2 + r_1}{2}} \quad \text{et} \quad r_2 - r_1 = e \text{ (épaisseur du tube)}$$

$$\text{Donc} \quad \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{e}{r_{ma}}$$

Soit en remplaçant dans l'expression du flux de chaleur:

$$\phi = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda}{\ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)} (\theta_1 - \theta_2) = \frac{2 \pi \lambda L r_{ma}}{e} (\theta_1 - \theta_2)$$

Or  $2 \pi L r_{ma} = S_{ma}$  : surface latérale moyenne du tube

$$\text{D'où :} \quad \phi = \frac{\lambda S_{ma}}{e} (\theta_1 - \theta_2) \quad \text{et} \quad R = \frac{e}{\lambda S_{ma}}$$

Cette approximation revient à remplacer, pour le calcul du flux thermique, le tube cylindrique, par un mur plan de même épaisseur  $e$  que le tube et dont la surface serait égale à la surface latérale moyenne  $S_{ma}$  du tube.

*Rappelons que cette approximation est valable tant que  $\frac{r_2}{r_1} < 2$  (soit dans la plus part des applications liées aux échangeurs de chaleur) et que l'erreur commise est au plus de 4% lorsque  $r_2 = 2r_1$ .*

### 6°) Conduction à travers 2 tubes cylindriques concentriques accolés

Soient 2 tubes cylindriques de longueur  $L$  en contact thermique parfait.  $\theta_1$  est la température de la face interne du tube 1 de conductivité thermique  $\lambda_1$  et  $\theta_3$  la température externe du tube 2 de conductivité thermique  $\lambda_2$ .  $\theta_2$  es la température de l'interface entre les deux tubes.

Le tube 1 constitue une première résistance thermique  $R_1$  au transfert de chaleur:

$$R_1 = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2 \pi \lambda_1 L}$$

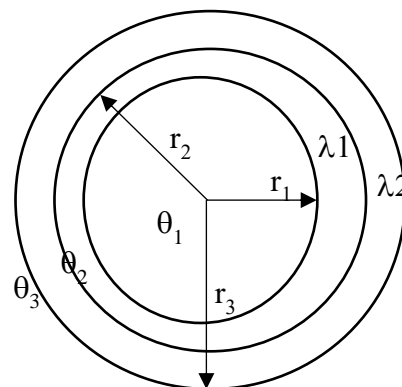
Le tube 2 constitue une deuxième résistance thermique  $R_2$  au transfert de chaleur:

$$R_2 = \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2 \pi \lambda_2 L} ; r_3 \text{ étant le rayon de la surface externe du tube 2.}$$

Ces résistances sont placées en série et la résistance équivalente est:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{1}{2 \pi L} \left( \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda_1} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\lambda_2} \right)$$

d'où l'expression du flux de chaleur (si  $\theta_1 > \theta_3$ ):



$$\phi = \frac{2\pi L(\theta_1 - \theta_3)}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2}}$$

**Application: calorifugeage et entartage des tubes**

*Expression simplifiée:*

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 = e_1 & \quad \text{et} \quad r_3 - r_2 = e_2 \\ r_{1ma} = \frac{r_2 + r_1}{2} & \quad \text{et} \quad r_{2ma} = \frac{r_2 + r_3}{2} \\ S_{1ma} = 2\pi r_{1ma} L & \quad \text{et} \quad S_{2ma} = 2\pi r_{1ma} L \end{aligned}$$

Dans ce cas: 
$$\phi = \frac{(\theta_1 - \theta_3)}{\frac{e_1}{\lambda_1 S_{1ma}} + \frac{e_2}{\lambda_2 S_{2ma}}}$$

**7°) Conduction à travers une paroi sphérique**

Soit une sphère de rayon intérieur  $r_1$ , de rayon extérieure  $r_2$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . La paroi intérieure et la paroi extérieure de la sphère sont respectivement aux températures  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $\theta_1 > \theta_2$ ).

Les surfaces isothermes sont des sphères concentriques à travers lesquelles

Le flux de chaleur est constant. Sa valeur à travers une sphère de rayon intermédiaire  $r$  et d'épaisseur  $dr$  est donné par la loi de FOURIER:

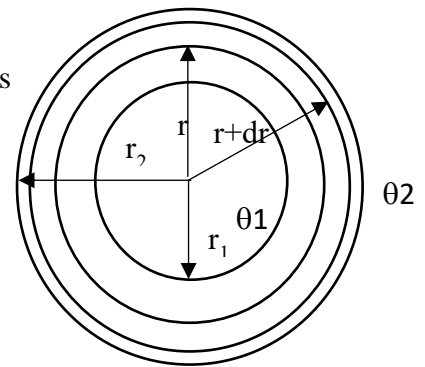
$$\phi = -4\pi r^2 \lambda \frac{d\theta}{dr} \quad \text{soit} \quad d\theta = -\frac{\phi}{4\pi \lambda r^2} dr$$

Et en intégrant de la paroi intérieure à la paroi extérieure:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = -\frac{\phi}{4\pi \lambda} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$$

D'où le flux thermique: 
$$\phi = \frac{4\pi \lambda r_1 r_2}{r_2 - r_1} (\theta_1 - \theta_2) \quad \text{ou} \quad \phi = \frac{4\pi \lambda}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} (\theta_1 - \theta_2)$$

La résistance thermique de la paroi de la sphère est: 
$$R = \frac{r_2 - r_1}{4\pi \lambda r_1 r_2}$$



***Expression rapprochée du flux de chaleur:***

$r_2 - r_1 = e$  épaisseur de la paroi sphérique

$\sqrt{r_1 r_2} = r_{mg}$ : rayon moyen de la paroi sphérique géométrique (moyenne géométrique)

$4\pi r_1 r_2 = 4\pi r_{mg}^2 = S_{mg}$ : surface moyenne géométrique des surfaces interne et externe

Et en remplaçant dans l'expression du flux de chaleur, on obtient une relation analogue à celle du mur plan:

$$\phi = \frac{\lambda S_{mg}}{e} (\theta_1 - \theta_2)$$

Et la résistance thermique vaut:  $R = \frac{e}{\lambda S m g}$

### *Profil radial des températures*

En intégrant l'équation de FOURIER entre la sphère intérieure de rayon  $r_1$  et une sphère de rayon intermédiaire  $r$ , on obtient:

$$\theta = \theta_1 - \frac{\Omega}{4\pi\lambda r_1} \frac{r-r_1}{r}$$

Le long d'un rayon, la température décroît de  $\theta_1$  à  $\theta_2$  selon une loi hyperbolique. Le profil de température n'est pas linéaire.

### 8°) Applications de la conduction à travers une sphère

Calcul de remplissage et d'isolation des citernes sphériques pour le stockage des hydrocarbures entre autre.

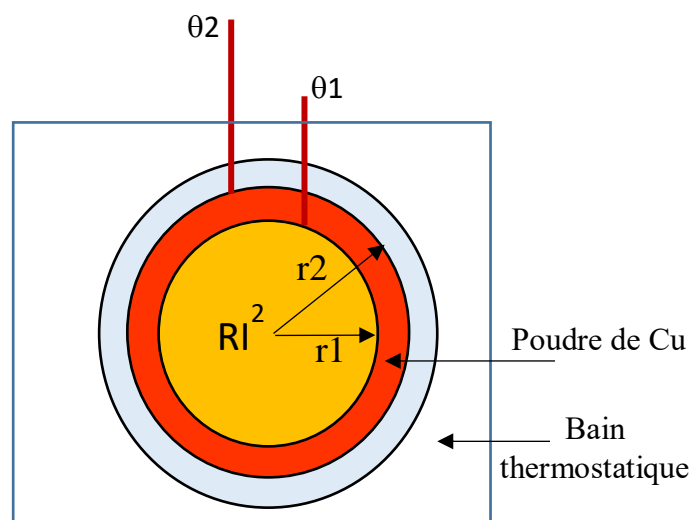
Ou encore mesure de la conductivité thermique des poudres:

On remplit de poudre l'espace qui sépare deux sphères de cuivre concentriques. La sphère intérieure contient une résistance électrique  $R_e$  connue ( $\Omega$ ) parcourue par un courant d'intensité  $I$  connue (A).

La sphère extérieure est plongée dans un bain thermostatique. Des thermocouples permettent de mesurer les températures  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

Le flux de chaleur qui traverse la poudre est égal au flux de chaleur dégagé par la résistance électrique par effet joule, et  $\lambda$  se calcule en Kcal/hm°C par l'expression:

$$\phi = \frac{4\pi\lambda r_1 r_2}{r_2 - r_1} (\theta_1 - \theta_2) = RI^2 3600 \cdot 10^{-3} / 4,18$$



### 9°) TD série II

**II-1°)** On considère une paroi de brique d'épaisseur 15 cm, de hauteur 2m et de largeur 3m. La température de chacune des faces sont respectivement à 150 °C et 30 °C. La conductivité thermique des briques est 0,6 Kcal/h.m °C.

Calculer

- Le flux thermique à travers la paroi
- La densité du flux
- La résistance thermique de la paroi

**II-2°)** le mur d'une maison est constitué d'une couche de brique de 22 cm et d'une couche de brique de 11 cm. les couches sont reliées entre elle par une épaisseur de mortier de 1 cm. Le mur est recouvert, sur sa face interne, d'une couche de plâtre de 1 cm et porte sur sa face externe, un crépi de 1,5 cm.

En prenant comme conductivités thermiques:

- $\lambda_1 = 0,4 \text{ kcal/m.h.}^\circ\text{C}$  pour le plâtre
- $\lambda_2 = 0,45 \text{ kcal/m.h.}^\circ\text{C}$  pour la brique
- $\lambda_3 = 0,7 \text{ kcal/m.h.}^\circ\text{C}$  pour le mortier
- $\lambda_4 = 0,5 \text{ kcal/m.h.}^\circ\text{C}$  pour le crépi

Calculer pour une surface de 125 m<sup>2</sup>:

- a) La résistance thermique de chaque couche
- b) La résistance thermique équivalente
- c) Le flux thermique pour une différence de température entre la face interne et la face externe du mur de 5°C .

**II-3°)** Le mur précédent est en fait percé de 8 fenêtres et 2 portes en bois. Chaque baie vitré a une superficie de 1,5 m<sup>2</sup> et a 8 mm d'épaisseur. Chaque porte a une superficie de 2,2 m<sup>2</sup> et une épaisseur de 40 mm.

En prenant comme conductivités thermiques.

- $\lambda_v = 0,6 \text{ Kcal/m.h.}^\circ\text{C}$  pour le verre
- $\lambda_b = 0,4 \text{ Kcal/m.h.}^\circ\text{C}$  pour le bois

Calculez pour la même différence de température de 5 °C:

- a) le flux thermique à travers les 8 fenêtres
- b) le flux thermique à travers les 2 portes
- c) le flux thermique à travers le mur
- d) le flux thermique total.

**II-4\***) Soit un tube d'acier 20/27 dont la température de la paroi interne est de 119,75 °C et celle de paroi externe est de 119,64 °C.

La conductivité thermique de l'acier est égale à 40 kcal/m.h.°C

- Calculer la résistance thermique du tube pour une longueur de 1 m
- Calculer le flux thermique correspondant
- Calculer la densité du flux thermique rapportée à la surface externe du tube.

**II-5\***) En fait, l'intérieur du tube précédent est entartré sur une épaisseur de 4 mm. Calculer:

- La résistance thermique du tartre (pour une longueur de 1 m)
- La résistance équivalente du tube entartré
- Le flux thermique correspondant

La conductivité thermique du tartre = 1,9 kcal /m.h.°C

**II-6\***) Calculez la résistance thermique d'un tube en acier inox de 1 m de longueur et de diamètres 50 / 60 pour une propagation radiale de chaleur.

Quel doit être l'épaisseur d'un tube en acier ordinaire de même diamètre intérieur pour obtenir la même résistance thermique?

$$\lambda \text{ acier inox} = 13.8 \text{ Kcal} / \text{h.m.}^\circ\text{C}$$

$$\lambda \text{ acier ordinaire} = 38.7 \text{ Kcal} / \text{h.m.}^\circ\text{C}$$

**II.7\***) La paroi plane d'un four est composée de 3 couches successives de briques :

- Une couche de 15 cm d'épaisseur de brique réfractaires d'alumine
- Une couche de brique isolantes de kaolin
- Une couche de 22,5 cm d'épaisseur de brique ordinaires de construction

La température des briques réfractaires de la face intérieure du four est de 982 °C. La température de la surface de contact des couches de brique réfractaires et isolantes est de 938 °C. La température de l'interface des couches de brique isolantes et de construction est de 138°C. Dans les conditions de fonctionnement du four, les conductivités thermiques moyennes des couches de la paroi sont :

| Couche                             | $\lambda_m(\text{W.m}^{-1}.\text{C}^{-1})$ |
|------------------------------------|--|
| Briques réfractaires d'alumine     | 1,62                                       |
| Briques isolantes de kaolin        | 0,23                                       |
| Briques ordinaires de construction | 1,39                                       |

Calculer :

- l'épaisseur de la couche des briques isolantes de kaolin
- la température de la surface extérieure du four

**II-6°)**

$$R = \frac{\ln \frac{60}{50}}{2\pi L 13,8} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$R = \frac{\ln \frac{D_x}{50}}{2\pi L 38,7} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ h}^\circ\text{C/Kcal} \quad : \ln(D_x) = \ln(50) + 2\pi L 38,7 \cdot R \quad : \quad D_x = 83,4 \text{ mm}$$

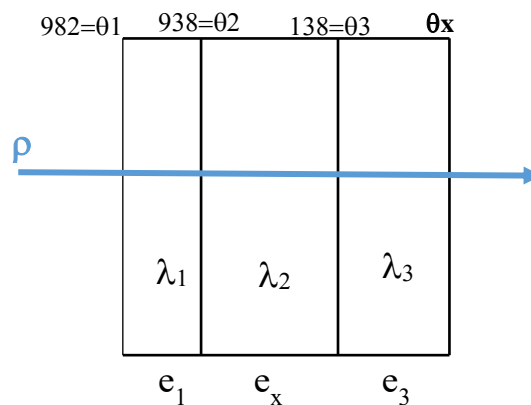
$$\text{Epaisseur} = \frac{D_x - 50}{2} = \mathbf{16,7 \text{ mm}}$$

**II.7°)**

$$\rho = \frac{\lambda_1}{e_2} (\theta_1 - \theta_2) = \frac{1,62}{15 \cdot 10^{-2}} (982 - 938) = \mathbf{475,2 \text{ w/m}^2}$$

$$\rho = \frac{\lambda_2}{e_x} (\theta_2 - \theta_3) : \quad \mathbf{e_x = 38,7 \text{ cm}}$$

$$\rho = \frac{\lambda_3}{e_3} (\theta_3 - \theta_x) : \quad \mathbf{\theta_x = 61 \text{ }^\circ\text{C}}$$



### Chapitre 3 : TRANSMISSION SOLIDE-LIQUIDE. ISOLATION THERMIQUE

#### 1°) Flux de chaleur entre deux fluides séparés par un mur plan

Soit un mur de conductivité thermique  $\lambda$ , d'épaisseur  $e$  et de surface  $S$ .

Le fluide 1 est à la température moyenne  $\theta_{m1}$

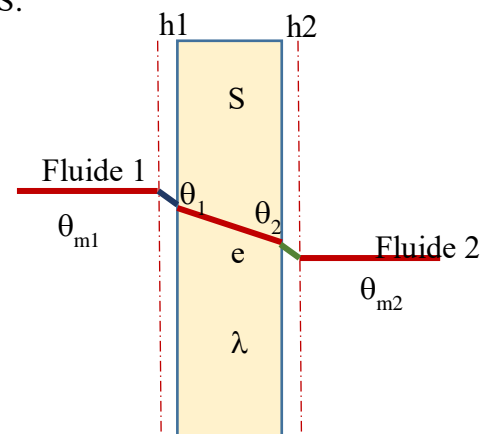
Le fluide 2 est à la température moyenne  $\theta_{m2}$

$h_1$  : coefficient de transmission fluide 1-paroi interne

$h_2$  : coefficient de transmission fluide 2-paroi externe

Si  $\theta_{m1} > \theta_{m2}$  un flux de chaleur se propage du fluide 1 vers

le fluide 2 à travers le mur.



Ce flux de chaleur rencontre 3 résistances en séries de tel manière que :

$$\phi = h_1 S (\theta_{m1} - \theta_1) \quad \text{le transfert paroi- fluide se fait par convection} \quad ; \quad (\theta_{m1} - \theta_1) = \phi / h_1 S$$

et ou par rayonnement

$$\phi = \frac{\lambda}{e} S (\theta_1 - \theta_2) \quad \text{le transfert à travers le mur se fait par conduction} \quad ; \quad (\theta_1 - \theta_2) = \phi \cdot e / S \cdot \lambda$$

$$\phi = h_2 S (\theta_2 - \theta_{m2}) \quad \text{le transfert paroi- fluide se fait par convection} \quad ; \quad (\theta_2 - \theta_{m2}) = \phi / h_2 S$$

et ou par rayonnement

---


$$(\theta_{m1} - \theta_{m2}) = \frac{\phi}{S} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2} \right)$$

$$\phi = \frac{S(\theta_{m1} - \theta_{m2})}{\frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2}}$$

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2} \quad ; \quad U: \text{coefficient global de transfert de chaleur}$$

$$\phi = US(\theta_{m1} - \theta_{m2})$$

$$\Sigma R = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{Sh_1} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{Sh_2} = \frac{1}{S} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2} \right)$$

$$\phi = (\theta_{m1} - \theta_{m2}) / \Sigma R$$

## 2°) Isolation thermique d'un mur plan

La même configuration que le paragraphe 1° mais cette fois de plus une couche isolante d'épaisseur  $e_{iso}$  et de conductivité thermique  $\lambda_{iso}$  :

De tel façon que  $R_{iso} = \frac{e_{iso}}{\lambda_{iso}.S}$

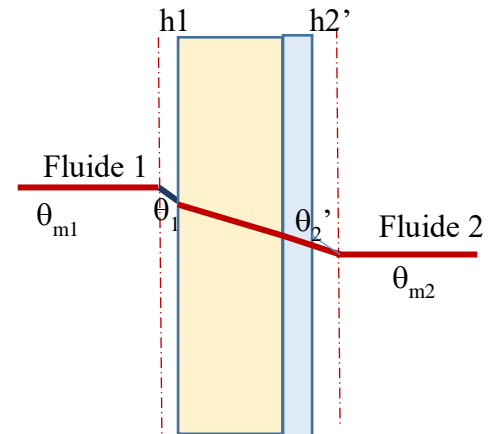
On suppose que le coefficient de transmission  $h2 = h2'$

$$\Sigma R' = R_1 + R_2 + R_{iso} + R_3 = \frac{1}{S} \left( \frac{1}{h1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{e_{iso}}{\lambda_{iso}} + \frac{1}{h2} \right)$$

$$\Delta R = \Sigma R' - \Sigma R = \frac{e_{iso}}{\lambda_{iso}.S}$$

$\Delta R$  est toujours positive, quelles que soient la valeur de  $\lambda_{iso}$  et l'épaisseur de l'isolant.

*On diminue le flux de chaleur, en calorifugeant une paroi plane, quelles que soient l'épaisseur et la nature du calorifuge.*



## 3°) Flux de chaleur entre deux fluides séparés par un tube cylindrique circulaire

Soit un tube cylindrique circulaire de rayon interne  $r_1$  et rayon externe  $r_2$  de conductivité thermique  $\lambda$  et de longueur  $L$ .

$\theta_{m1}$  et  $\theta_{m2}$  sont les températures moyennes du fluide 1 et du fluide 2

$\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les températures des parois interne et externe

$h1$  : coefficient de transmission fluide 1- paroi interne

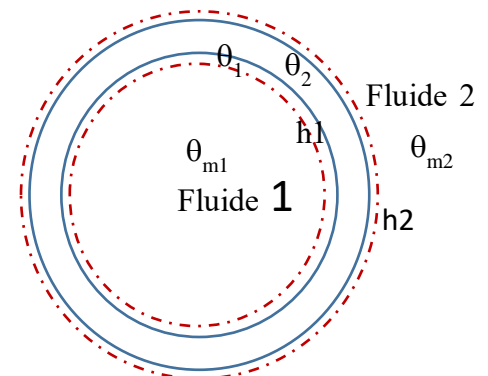
$h2$  : coefficient de transmission fluide 2- paroi externe

Si  $\theta_{m1} > \theta_{m2}$  un flux de chaleur se propage du fluide 1 vers

le fluide 2 à travers le tube cylindrique circulaire.

Ce flux de chaleur rencontre 3 résistances en séries:

- Résistance de l'interface interne-fluide intérieure :  $R_1 = \frac{1}{2\pi r_1 L h_1}$





- Résistance du tube cylindrique circulaire :  $R_1 = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi\lambda L}$
- Résistance de l'interface interne-fluide intérieure :  $R_1 = \frac{1}{2\pi r_1 L h_1}$

La résistance équivalente :  $\Sigma R = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda} + \frac{1}{h_2 r_2} \right)$

D'où le flux de chaleur :  $\phi = (\theta_{m1} - \theta_{m2}) / \Sigma R$

$$\phi = \frac{2\pi L (\theta_{m1} - \theta_{m2})}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda} + \frac{1}{h_2 r_2}}$$

**Le coefficient global de transfert de chaleur :**

Sa valeur dépend de la surface à laquelle on le rapporte :

On peut le rapporter à :

- la surface intérieure  $S_1$  du tube,  $S_1 = 2\pi r_1 L$
- la surface extérieure  $S_2$  du tube,  $S_2 = 2\pi r_2 L$
- la surface moyenne  $S_{ma}$  du tube,  $S_{ma} = 2\pi r_{ma} L$  avec  $r_{ma} = (r_1 + r_2)/2$

Dans ce cas :  $\phi = U_1 \cdot S_1 (\theta_{m1} - \theta_{m2}) = U_2 \cdot S_2 (\theta_{m1} - \theta_{m2}) = U_{ma} \cdot S_{ma} (\theta_{m1} - \theta_{m2})$

$$D'où : U_1 \cdot S_1 = U_2 \cdot S_2 = U_{ma} \cdot S_{ma} = \frac{2\pi L}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda} + \frac{1}{h_2 r_2}}$$

Donc pour chaque surface on définit l'expression du coefficient global de transfert de chaleur:

$$\frac{1}{U_1} = \frac{1}{h_1} + \frac{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda} + \frac{r_1}{h_2 r_2}$$

$$\frac{1}{U_2} = \frac{r_2}{h_1 r_1} + \frac{r_2 \ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda} + \frac{1}{h_2}$$

$$\frac{1}{U_{ma}} = \frac{r_{ma}}{h_1 r_1} + \frac{r_{ma} \ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda} + \frac{r_{ma}}{h_2 r_2}$$

**Expressions rapprochées:**

En assimilant la moyenne logarithmique à la moyenne arithmétique, calculer le flux de chaleur et les coefficients globaux de transfert de chaleur :

$$\frac{r_2 - r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \approx r_{ma} = (r_1 + r_2)/2 \quad ; \quad r_2 - r_1 = e \dots\dots\dots$$

#### 4°) Isolation thermique d'un tube cylindrique circulaire

Recouvrons la surface externe du tube précédent d'une couche uniforme de calorifugeage de conductivité thermique  $\lambda_{iso}$  et de rayon extérieur  $r_{iso}$ .

On suppose que  $h_2$  est le même à la face du calorifugeage qu'à l'interface paroi externe une quatrième résistance s'ajoute :

$$R_{iso} = \frac{\ln \frac{r_{iso}}{r_2}}{2\pi\lambda_{iso}L}$$

La résistance équivalente après isolation :

$$\Sigma R' = R_1 + R_2 + R_{iso} + R_3 = \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda} + \frac{\ln \frac{r_{iso}}{r_2}}{\lambda_{iso}} + \frac{1}{h_2 r_{iso}} \right)$$

$$\Delta R = \Sigma R' - \Sigma R = \frac{1}{2\pi L} \left[ \frac{\ln \frac{r_{iso}}{r_2}}{\lambda_{iso}} + \frac{1}{h_2} \left( \frac{1}{r_{iso}} - \frac{1}{r_2} \right) \right]$$

$$r_{iso} > r_2 \quad \frac{1}{r_{iso}} < \frac{1}{r_2} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{r_{iso}} - \frac{1}{r_2} < 0 \quad \text{alors que} \quad \frac{\ln \frac{r_{iso}}{r_2}}{\lambda_{iso}} > 0$$

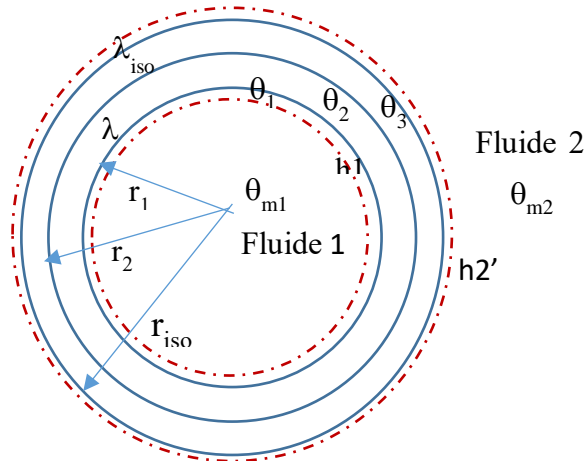
Dans ce cas  $\Delta R$  n'est pas forcément positive.

En effet, en plaçant le calorifuge, on augmente la surface d'échange externe ( $\phi$  a tendance à augmenter) et on augmente simultanément l'épaisseur entre les deux fluides ( $\phi$  a tendance à diminuer).  $[\phi = \frac{\lambda S m a}{e} (\theta_1 - \theta_2)]$

Il y a donc compétition entre l'effet d'augmentation de la surface externe d'échange et l'effet d'augmentation de l'épaisseur. Suivant que l'un ou l'autre de ces deux effets l'emporte, le flux de chaleur augmente ou diminue.

**Exercice d'application :**

**Montrez que l'entartrage d'un tube cylindrique circulaire diminue toujours le flux de chaleur.**



### 5°) Choix de l'épaisseur d'isolation thermique d'un tube cylindrique circulaire

Donc le but du calorifugeage est évidemment de diminuer le flux de chaleur, donc d'avoir  $\Delta R > 0$

$$\Delta R = \frac{1}{2\pi L} \left[ \frac{\ln \frac{r_{iso}}{r_2}}{\lambda_{iso}} + \frac{1}{h_2} \left( \frac{1}{r_{iso}} - \frac{1}{r_2} \right) \right]$$

$$\Delta R = \frac{1}{2\pi L} \frac{1}{h_2 r_2} \left[ \frac{h_2 r_2}{\lambda_{iso}} \ln \left( \frac{r_{iso}}{r_2} \right) + \frac{r_2}{r_{iso}} - 1 \right] \quad \text{on pose } \frac{r_{iso}}{r_2} = x \quad \text{et } \frac{\lambda_{iso}}{h_2 r_2} = k$$

$x$  est toujours supérieur à 1 (puisque  $r_{iso} > r_2$ )

$$\text{Donc } \Delta R = \frac{1}{2\pi L} \frac{1}{h_2 r_2} \left[ \frac{1}{k} \ln(x) + \frac{1}{x} - 1 \right] \quad \Delta R = f(x) \text{ fonction que nous allons étudier.}$$

$\frac{d(\Delta R)}{dx}$  : nous permet d'étudier le signe de la fonction

$$\frac{d(\Delta R)}{dx} = \frac{1}{2\pi L} \frac{1}{h_2 r_2} \left[ \frac{1}{kx} - \frac{1}{x^2} \right] = \frac{1}{2\pi L} \frac{1}{h_2 r_2} \left( \frac{x-k}{kx^2} \right)$$

|                          |           |  |           |
|--------------------------|-----------|--|-----------|
| <b>x</b>                 | 0         | k  | $+\infty$ |
| $\frac{d(\Delta R)}{dx}$ |           | -  | +         |
| $\Delta R$               | $+\infty$ | $\frac{1}{2\pi L} \frac{1}{h_2 r_2} \left[ \frac{1}{k} \ln(k) + \frac{1}{k} - 1 \right]$ | $+\infty$ |

Un minimum pour  $x = k$  : soit pour  $\frac{r_{iso}}{r_2} = \frac{\lambda_{iso}}{h_2 r_2}$  donc  $r_{iso} = \frac{\lambda_{iso}}{h_2}$

$\Delta R = 0$  pour  $x = 1$  (normale  $\frac{r_{iso}}{r_2} = 1$  ;  $r_{iso} = r_2$ )

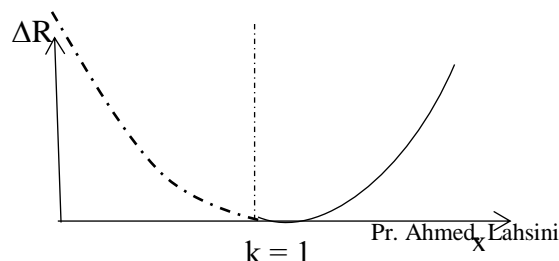
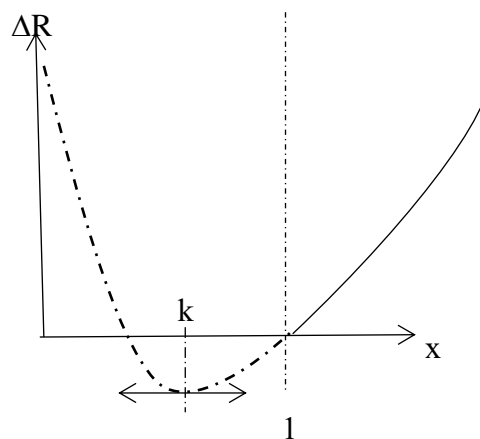
Suivant la valeur de  $k$  :

- $k < 1$  soit  $\frac{\lambda_{iso}}{h_2 r_2} < 1$

$x > 1$  ( $\frac{r_{iso}}{r_2} > 1$ ), on a toujours intérêt à calorifuger

- $k = 1$  soit  $\frac{\lambda_{iso}}{h_2 r_2} = 1$

On a toujours intérêt à calorifuger, mais le gain n'augmente que très lentement aux faibles épaisseurs de calorifuge.



- $K > 1$  soit  $\frac{\lambda_{iso}}{h_2 r_2} > 1$

On n'a pas intérêt à calorifuger, tant que  $x < x_2$

$x_2$  est la seconde racine de l'équation :

$$\frac{1}{k} \ln(x) + \frac{1}{x} - 1 = 0 \text{ et } x_1 = 1 \text{ est la première racine}$$

Pour trouver la seconde racine( $x_2$ ) on pose :

$$-\frac{1}{k} \ln(y) + y - 1 = 0 ; \quad y - 1 = \frac{1}{k} \ln(y)$$

$$y - 1 = z \quad \frac{1}{k} \ln(y) = Z$$

et on trace deux courbes  $z = f(y)$  et  $Z = f(y)$

Ces courbes se coupent en 2 points

dont les abscisses fournissent les

Racines cherchées, soit :  $x_1 = y_1 = 1$

et  $x_2 = 1/y_2$

$$\frac{r_{iso2}}{r_2} = x_2 ; \quad \frac{r_{iso1}}{r_2} = x_1 = 1 : \Delta R = 0$$

$r_{iso} = r_2 \cdot x_2$  : est le rayon minimal externe que doit avoir la couche de calorifugeage pour que le flux de chaleur soit diminué.

Il correspond à une épaisseur minimale de calorifuge :

$$r_{iso} = x_2 r_2 ; \quad r_2 + e = x_2 r_2$$

Donc

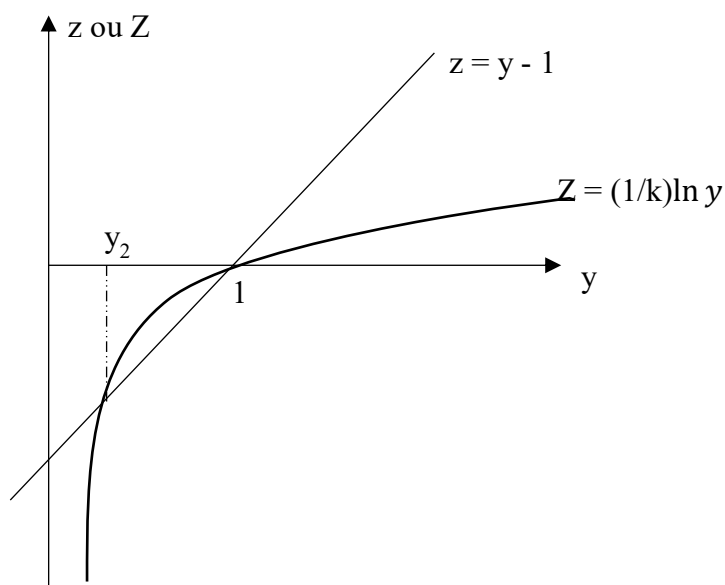
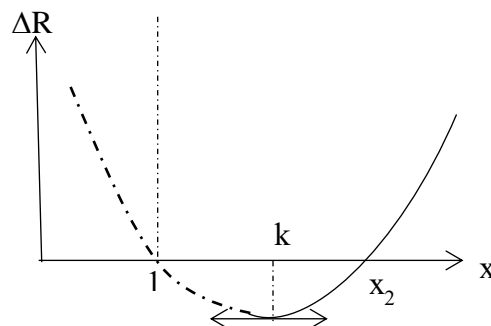
$$e_{iso \min} = r_2(x_2 - 1)$$

Comme on a travaillé sur  $\Delta R$  on peut le faire aussi sur  $U$  :

$$\phi = U_1 S_1 \Delta \theta$$

$$\frac{1}{U_1} = \frac{1}{h_1} + D_1 \frac{\ln \frac{D_2}{D_1}}{2\lambda} + D_1 \frac{\ln \frac{(D_2+2x)}{D_2}}{2\lambda_{iso}} + \frac{D_1}{h_2(D_2+2x)}$$

On peut montrer que  $\frac{1}{U_1}$  passe par un minimum ce qui correspond à un maximum de perte thermique. D'une façon générale,  $\frac{1}{U_1}$  passe par un extremum en fonction de l'épaisseur  $x$  d'isolant lorsque:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{U_1} \right) = 0$



$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{U_1} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\ln \left( \frac{D_2 + 2x}{D_2} \right)}{2\lambda_{iso}} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{D_1}{h_2(D_2 + 2x)} \right) = \frac{D_1}{2\lambda_{iso}} \left( \frac{2D_1}{D_1(D_2 + 2x)} \right) + \frac{D_1}{h_2} \left( \frac{-2}{(D_2 + 2x)^2} \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{U_1} \right) = 0 = \frac{D_1}{\lambda_{iso}(D_2 + 2x)} - \frac{2D_1}{h_2(D_2 + 2x)^2} = h_2(D_2 + 2x)^2 D_1 - 2D_1 \lambda_{iso}(D_2 + 2x) = 0$$

$$h_2(D_2 + 2x) = 2\lambda_{iso} \quad ; \quad (D_2 + 2x) = 2\lambda_{iso}/h_2 = D_c \quad : \quad (\text{diamètre critique})$$

$\frac{1}{U_1}$  représente un extremum pour une épaisseur d'isolant  $x_0$  telle que :  $(D_2 + 2x_0) = 2\lambda_{iso}/h_2$

$$x_0 = \frac{\lambda_{iso}}{h_2} - \frac{D_2}{2}$$

\*Pour toute valeur  $x > x_0$ , on a  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{U_1} \right) > 0$  donc  $\frac{1}{U_1}$  est une

Fonction croissante ( $U_1$  diminue alors le flux thermique aussi)

\*Pour l'épaisseur  $x_0$  d'isolant les pertes passent par un minimum

\* $x < x_0$  (compromis entre la surface et la conductivité), difficile à

réalisé. Pour un bon isolant il faut que  $x_0 < 0$  c'est-à-dire :

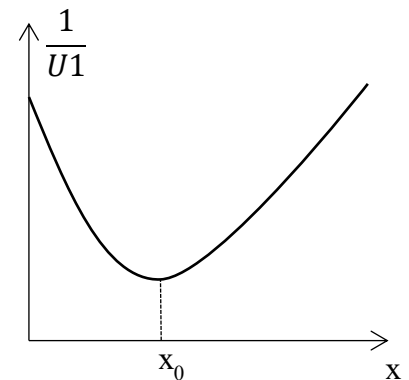
$$x_0 = \frac{\lambda_{iso}}{h_2} - \frac{D_2}{2} \leq 0 \quad \text{soit}$$

$\lambda_{iso} \leq h_2 D_2 / 2$  : condition difficilement réalisable dans le cas d'un tube de petit diamètre extérieure en présence d'un fluide dont le coefficient de convection est faible.

Pour l'air  $h_2 = 10 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}$ , pour un tube de diamètre 12 mm, l'isolant doit avoir :

$$\lambda_{iso} \leq (10 \cdot 12 \cdot 10^{-3}) / 2 = 0,06 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}$$

Condition remplie par les amiantes et les fibres minérales. (Laine de verre,  $\lambda = 0,04 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}$ )



### 6°) En résumé :

Pour diminuer les pertes thermiques :

- On a toujours intérêt à calorifuger pour une paroi plane
- Pour un tube cylindrique circulaire, cela dépend de la valeur de  $k = \frac{\lambda_{iso}}{h2r2}$

\* si  $\frac{\lambda_{iso}}{h2r2} \leq 1$ , on a toujours intérêt à calorifuger quelle que soit l'épaisseur

\*si  $\frac{\lambda_{iso}}{h2r2} > 1$ , il faut une épaisseur minimale de calorifuge.

Le choix de l'épaisseur du calorifugeage se fait selon les critères précédents. Mais il faut remarquer que le prix de revient (achat, pose, et entretien) du calorifuge augmente avec  $x$ .

L'épaisseur retenue résulte d'un bilan économique : c'est celle pour laquelle, le prix de revient du calorifuge plus le prix des calories perdues est minimal.

### 7°) TD SERIE 3

**III.1°)** La paroi d'un échangeur de chaleur à plaques est constituée d'une plaque de cuivre de 9,5 mm d'épaisseur. Les coefficients d'échange de chaleur sur les deux côtés sont 2340 et 6100 Kcal/h.m<sup>2</sup>.°C correspondant respectivement aux températures 82 et 32 °C du fluide. En supposant que la conductivité de la paroi est 333 Kcal/h.m.°C, évaluez la densité du flux de chaleur et les températures des surfaces.

**III.2°)** Un bureau dont les murs sont constitués d'une couche de brique ( $e_1=22\text{cm}$ ;  $\lambda_1= 1$  en MKH)

et d'une couche de plâtre ( $e_2 =11\text{cm}$ ;  $\lambda_2= 0,7$  en MKH). Ce bureau est maintenu à une température de 25 °C grâce à des résistances électriques. La température moyenne de l'extérieur est de 5 °C. La surface totale des murs du bureau est égale à 50 m<sup>2</sup>.

Serait-il intéressant d'isoler ce bureau, si on chauffe les trois mois d'hiver pendant 8 heures par jour et pour une location de 30 ans?

Données:

- $h_{\text{int}} = 10 \text{ Kcal/ h.}^\circ\text{C.m}^2$                        $h_{\text{ext}} = 20 \text{ Kcal/ h.}^\circ\text{C.m}^2$
- Prix du Kwh = 0.90 Dhs
- Isolant            \*  $\lambda = 0,4$  en MKH
- \* épaisseur = 10 cm
- Prix au m<sup>2</sup>/10cm d'épaisseur = 20 Dhs

**III.3°)** Dans une canalisation d'acier ( $\lambda = 46 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$ ) de diamètre intérieur de 120 mm et d'épaisseur 5 mm, circule de la vapeur saturée (240 °C). La température de l'air ambiant est de 20 °C, la longueur de la conduite est de 50 m.

**a°)** Déterminez le débit de vapeur condensée en sortie de conduite, sachant que la chaleur latente de condensation de la vapeur est de 670 Kcal/kg.

**b°)** On calorifuge la canalisation à l'aide d'une laine de minérale ( $\lambda = 0,1 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$ ) d'épaisseur 7 mm. Déterminez le nouveau débit de vapeur condensée en sortie de conduite.

Coefficient de transmission vapeur/paroi = 11600 W/m<sup>2</sup>. °C

Coefficient de transmission paroi externe/ambiance = 14 W/m<sup>2</sup>. °C

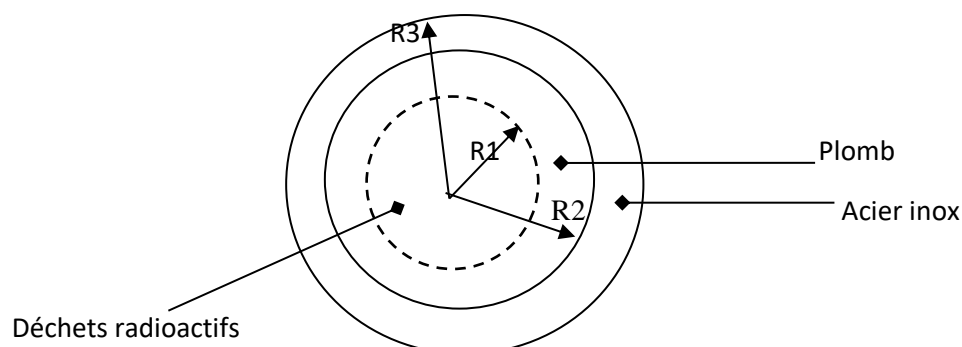
**III.4°)** Un stockage radioactif est constitué d'une sphère en matériau composite constitué de deux couches : une couche intérieure en plomb (conductivité thermique  $\lambda_{\text{Pb}} = 35,3 \text{ W/m} \cdot \text{°K}$ ) de rayon intérieur  $R1 = 0,25 \text{ m}$  et de rayon extérieur  $R2 = 0,30 \text{ m}$ , recouvert d'une couche d'acier inoxydable (conductivité thermique  $\lambda_{\text{ac}} = 15,1 \text{ W/m} \cdot \text{°K}$ ) de rayon externe  $R3 = 0,31 \text{ m}$ . La cavité est remplie avec des déchets radioactifs qui produisent de la chaleur à un taux de :  $\dot{q} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$ . Il est proposé de plonger le récipient dans les eaux océaniques qui sont à une température de  $\theta_a = 283 \text{ °K}$ , le coefficient de convection à la surface extérieure du récipient étant  $h_c = 500 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°K}$ .

a°) Déterminer la puissance libérée par le stockage radioactif.

b°) Évaluer les températures  $\theta_1$  et  $\theta_3$  correspondant aux surfaces interne et externe.

c°) Sachant que la température de fusion du plomb est  $\theta_{\text{fusion}} = 601 \text{ °K}$ , que pensez-vous des résultats précédents ? Commentez votre réponse.

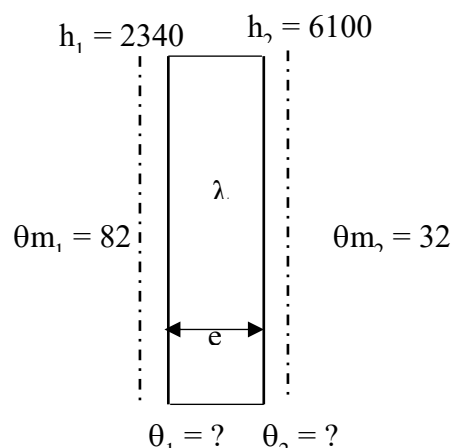
d°) Pour fiabiliser ce stockage, on propose de placer ce système dans un réservoir intermédiaire dans lequel on fait circuler les eaux océaniques à grand débit, de façon à augmenter le coefficient de convection  $h_c$ . Quelle devra-t-êtr la valeur minimale du coefficient d'échange  $h_c$  pour que la température de l'enveloppe ne dépasse pas  $500 \text{ °K}$ ?



**III.1°)**

$$\rho = \frac{(\theta_{m1} - \theta_{m2})}{\frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2}} = \frac{(82 - 32)}{\frac{1}{2340} + \frac{9,5 \cdot 10^{-3}}{333} + \frac{1}{6100}}$$

$$\rho = 80723,28 \text{ Kcal/hm}^2$$





$$\rho = \frac{(82 - \theta_1)}{\frac{1}{2340}} : \quad \theta_1 = 47,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\rho = \frac{(82 - \theta_2)}{\frac{1}{2340} + \frac{9,5 \cdot 10^{-3}}{333}} : \quad \theta_2 = 45,2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

### III.2\*)

**Flux de chaleur avant isolation :**

$$\Phi = \frac{(\theta_{m1} - \theta_{m2}) \cdot S}{\frac{1}{h_1} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{1}{h_2}} = \frac{(25-5) \cdot 50}{\frac{1}{10} + \frac{22 \cdot 10^{-2}}{1} + \frac{11 \cdot 10^{-2}}{0,7} + \frac{1}{20}} = 1897,5 \text{ Kcal/h}$$

**Flux de chaleur après isolation :**

$$\Phi' = \frac{(\theta_{m1} - \theta_{m2}) \cdot S}{\frac{1}{h_1} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_{iso}}{\lambda_{iso}} + \frac{1}{h_2}} = \frac{(25-5) \cdot 50}{\frac{1}{10} + \frac{22 \cdot 10^{-2}}{1} + \frac{11 \cdot 10^{-2}}{0,7} + \frac{10^{-2}}{0,4} + \frac{1}{20}} = 1287 \text{ Kcal/h}$$

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi' = 1897,5 - 1287 = 610,5 \text{ Kcal/h}$$

$$\text{Nombre d'heures } 3 \times 30 \times 8 \times 30 = 21600 \text{ h}$$

$$\Delta\Phi \times 21600 \text{ h} = 13186800 \text{ Kcal} \dots \dots \times 4,18 / 3600 = 15311,4 \text{ Kwh}$$

$$15311,4 \text{ Kwh} \times 0,9 \text{ Dh} = 13780,06 \text{ Dh}$$
 c'est le gain réalisé en isolant le bureau

Il faut retrancher l'investissement fait sur l'achat de l'isolant

$$\text{Soit: } 20 \text{ Dh} \times 50 \text{ m}^2 = 1000 \text{ Dh}$$

$$\text{Donc le } \mathbf{\text{bénéfice}}$$
 réalisé en plaçant l'isolant est de  $13780 - 1000 = \mathbf{12780 \text{ Dh}}$

### III.3\*)

$$\text{a}^\circ) \quad \Phi = \frac{2\pi L \Delta\theta}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda} + \frac{1}{h_2 r_2}} = \frac{2\pi 50 (240-20)}{\frac{1}{11600 \cdot 60 \cdot 10^{-3}} + \frac{\ln \frac{130}{46}}{46} + \frac{1}{14 \cdot 65 \cdot 10^{-3}}} = 62713 \text{ w}$$

$$\text{Kw} = \text{Kj/s} = \frac{3600}{4,18} \cdot \text{Kcal/h} \quad ; \quad \text{w} = \frac{3600}{4,18} \cdot 10^{-3} \text{ Kcal/h}$$

$$\Phi = 62713 \cdot \frac{3600}{4,18} \cdot 10^{-3} = 54011,5 \text{ Kcal/h}$$

$$q_m = \Phi / L_v = 54011,5 / 670 = 80,6 \text{ Kg/h}$$

$$\mathbf{b}^{\circ}) \Phi = \frac{2\pi L \Delta\theta}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{\ln \frac{130}{120}}{\lambda} + \frac{\ln \frac{144}{130}}{\lambda_{iso}} + \frac{1}{h_2 r_{iso}}} = \frac{2\pi 50(240-20)}{\frac{1}{11600 \cdot 60 \cdot 10^{-3}} + \frac{\ln \frac{130}{120}}{46} + \frac{\ln \frac{144}{130}}{0,1} + \frac{1}{14 \cdot 72 \cdot 10^{-3}}} = 34248,8 \text{ w}$$

$$\Phi = 29496,55 \text{ Kcal/h}$$

$$q'_m = 29496,55/670 = 44,02 \text{ Kg/h}$$

### III.4°)

$$\mathbf{a}^{\circ}) \Phi = v \cdot \dot{q} = \frac{4}{3} \cdot \pi R_1^3 \cdot \dot{q} = 98,175 \text{ Kw}$$

$$\mathbf{b}^{\circ}) \Phi = \rho \cdot S = -\lambda \left( \frac{d\theta}{dr} \right) 4\pi r^2$$

$$\Phi = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\frac{1}{4\pi\lambda Pb} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} = \frac{\theta_2 - \theta_3}{\frac{1}{4\pi\lambda_{acier}} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right)} \quad (1)$$

$$\text{Avant il faut calculer } \theta_3: \Phi = h_c \cdot S(\theta_3 - \theta_a) = 500 \cdot 4\pi(0,31)^2 \cdot (\theta_3 - 283)$$

$$\theta_3 = 445,7 \text{ }^{\circ}\text{K}$$

On injecte la valeur de  $\theta_3$  dans l'équation (1) et on aura la valeur de  $\theta_2$ . Puis on injecte cette dernière dans la 1<sup>ère</sup> équation pour avoir la valeur de  $\theta_1 = 648,92 \text{ }^{\circ}\text{K}$

$\mathbf{c}^{\circ})$  On trouve une valeur de  $\theta_1 >$  à la température de fusion du plomb ( $648,92 \text{ }^{\circ}\text{K} > 601 \text{ }^{\circ}\text{K}$ ).

Donc le matériau va fondre.

$\mathbf{d}^{\circ})$  On demande que la température de l'enveloppe en plomb ne doit pas dépasser les  $500 \text{ }^{\circ}\text{K}$ . Pour cela on doit recalculer la valeur du coefficient de convection  $h_c'$ .

$$\Phi = \frac{4\pi(\theta_1 - \theta_a)}{\frac{1}{\lambda Pb} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\lambda_{acier}} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1}{h_c'(R_3^2)}} \quad h_c' = 5946 \text{ w/m}^2\text{ }^{\circ}\text{K}$$

## 8°) DEVIS DES MATERIAUX D'ISOLATION THERMIQUE

*(Devis établis en 2005)*

Références de la société : Tél. : 022 66 45 25/26 ; Fax : 022 66 45 27 ; [deltherm@iam.net.ma](mailto:deltherm@iam.net.ma)

Les prix sont HT par mètre linéaire est 50 mm d'épaisseur de **laine de verre**

|            |         |        |
|------------|---------|--------|
| Tuyauterie | ¾"      | 121,62 |
|            | 1 "     | 127,22 |
|            | 1 "1/2" | 138,42 |
|            | 2"      | 146,85 |
|            | 2 "1/2" | 157,54 |
|            | 3"      | 166,53 |
|            | 4"      | 183,95 |
|            | 5"      | 203,06 |
|            | 8"      | 259,89 |
| Gaine      |         | 175,52 |
| Coude 90°  | ¾"      | 121,62 |
|            | 1 "     | 127,22 |
|            | 1 "1/2" | 138,42 |
|            | 2"      | 176,22 |
|            | 2 "1/2" | 189,05 |
|            | 3"      | 199,84 |
|            | 4"      | 257,53 |
|            | 5"      | 284,28 |
| Coude 45 ° | ¾"      | 60,81  |
|            | 1 "1/2" | 69,21  |
|            | 2"      | 88,11  |
|            | 2 "1/2" | 94,53  |
|            | 3"      | 99,92  |
|            | 5"      | 142,14 |
| Piquage    | ¾"      | 60,81  |

|            |         |        |
|------------|---------|--------|
|            | 1 "1/2" | 69,21  |
|            | 2"      | 73,42  |
|            | 3"      | 83,26  |
|            | 4"      | 91,97  |
| Gaine      |         | 87,76  |
| Arrêt      | 3/4"    | 36,49  |
|            | 1 "     | 38,17  |
|            | 1 "1/2" | 41,53  |
|            | 2"      | 44,05  |
|            | 2 "1/2" | 47,26  |
|            | 3"      | 49,96  |
|            | 4"      | 55,18  |
|            | 5"      | 60,92  |
|            | 8"      | 77,97  |
| Gaine      |         | 77,97  |
| Equipement |         | 433,69 |





## Chapitre 4 : REGIME TRANSITOIRE – EQUATION DE L'AILETTE

### 1°) BILAN THERMIQUE

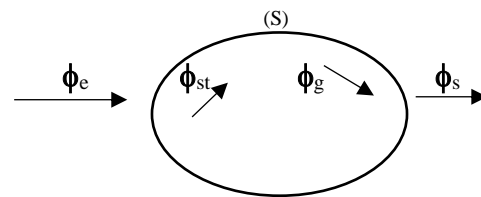
Il faut tout d'abord définir un système S par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir les différents flux de chaleur qui influent sur le système et qui peuvent être:

Flux de chaleur stocké :  $\phi_{st}$

Flux de chaleur généré :  $\phi_g$

Flux de chaleur entrant :  $\phi_e$

Flux de chaleur sortant :  $\phi_s$



On applique alors le premier principe de la thermodynamique pour établir le bilan d'énergie du système:

$$\phi_e + \phi_g = \phi_s + \phi_{st}$$

#### Expression des flux d'énergie

Il faut ensuite établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, on obtient l'équation différentielle dont la résolution permet de connaître l'évolution de la température en chaque point du système.

#### Stockage d'énergie:

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps, d'où: (*à pression constante et sans changement d'état*)

$$\phi_{st} = \rho \cdot v \cdot c \frac{d\theta}{dt} = mc \frac{d\theta}{dt} \quad \rho \cdot v \cdot c = mc : \text{capacité thermique}$$

$$[\text{Ou encore: } \frac{dQ}{dt} = \rho \cdot v \cdot c \frac{\partial \theta}{\partial t} ]$$

#### Génération d'énergie:

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. On peut l'écrire sous la forme:

$$\phi_g = \dot{q} \cdot v$$

$\phi_g$ : flux d'énergie généré (Kcal/h)

$\dot{q}$ : Densité volumique d'énergie générée (Kcal/h.m<sup>3</sup>)

v: volume (m<sup>3</sup>)

## 2°) REGIME TRANSITOIRE

Considérons un volume  $dv = (dxdydz)$  immobile et un système d'axe  $(oxyz)$ .

Un flux de chaleur de direction quelconque peut toujours être décomposé en trois flux pénétrants par les trois faces du parallélépipède. De plus, ce flux de chaleur est variable dans le temps, ainsi que la température en tout point du volume élémentaire, c'est-à-dire que nous sommes en régime non établi.

La quantité de chaleur, entrante par la face gauche, selon

la direction  $ox$  s'écrira:  $dQ_{ex} = -\lambda dydz \frac{\partial \theta}{\partial x} dt$

La quantité de chaleur, sortante par la face droite, selon

la direction  $ox$  s'écrira:

$$dQ_{sx} = -\lambda dydz \frac{\partial}{\partial x} \left( \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \right) dt$$

$$dQ_{sx} = -\lambda dydz \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx \right) dt$$

De même pour les quantités  $dQ_{ey}$ ;  $dQ_{sy}$ ;  $dQ_{ez}$ ;  $dQ_{sz}$

$$dQ_{ey} = -\lambda dx dz \frac{\partial \theta}{\partial y} dt \quad \text{et} \quad dQ_{sy} = -\lambda dx dz \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} dy \right) dt$$

$$dQ_{ez} = -\lambda dx dy \frac{\partial \theta}{\partial z} dt \quad \text{et} \quad dQ_{sz} = -\lambda dy dx \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz \right) dt$$

La quantité totale fournie au volume élémentaire  $dv$  comprend:

$$dQ_e = dQ_{ex} + dQ_{ey} + dQ_{ez}$$

Et la quantité de chaleur sortante du volume élémentaire  $dv$  est:

$$dQ_s = dQ_{sx} + dQ_{sy} + dQ_{sz}$$

la quantité de chaleur générée :  $dQ_g = \dot{q}(dxdydz)dt$

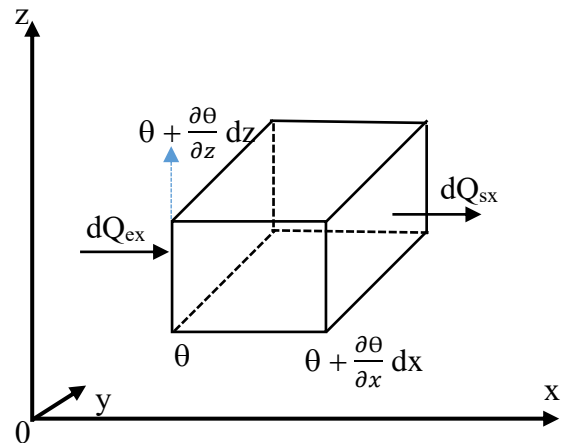
la quantité de chaleur stockée :  $dQ_{st} = \rho c(dxdydz) \frac{\partial \theta}{\partial t} dt$

Le bilan thermique appliqué au volume élémentaire est:

$$dQ_e + dQ_g = dQ_{st} + dQ_s$$

$$-\lambda dydz \frac{\partial \theta}{\partial x} dt - \lambda dx dz \frac{\partial \theta}{\partial y} dt - \lambda dx dy \frac{\partial \theta}{\partial z} dt + \dot{q}(dxdydz)dt =$$

$$\rho c(dxdydz) \frac{\partial \theta}{\partial t} dt - \lambda dydz \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx \right) dt - \lambda dx dz \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} dy \right) dt - \lambda dy dx \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz \right) dt$$





$$\text{Donc : } \dot{q}(dx dy dz) dt = \rho c (dx dy dz) \frac{\partial \theta}{\partial t} dt - \lambda dx dy dz \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) dt$$

$$\text{Simplifions le volume (dx dy dz) : } \dot{q} dt = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} dt - \lambda \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) dt$$

$$\text{et dt alors : } \dot{q} = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\rho c}$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} : \text{propriété thermique du corps (diffusivité thermique: } L^2 T^{-1})$$

On peut aussi écrire le bilan thermique sous la forme:

$$\left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\dot{q}}{\lambda}$$

Si encore  $\lambda = f(\theta)$  il faudrait l'introduire dans l'équation précédente sous la forme:  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$

Pour un régime établi (permanent)  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$  ; ainsi que  $\left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = 0$

$$\text{Et } dQ_{st} = 0 \quad \text{et } dQ_g = 0$$

C'est à dire la quantité de chaleur à l'entrée est égale à la quantité de chaleur à la sortie:

$$dQ = dQ_e = dQ_s = dQ_{ex} + dQ_{ey} + dQ_{ez}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot \left( dy dz \frac{\partial \theta}{\partial x} + dx dz \frac{\partial \theta}{\partial y} + dx dy \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$$

### Exercice d'application:

Un long et mince (épaisseur  $e$ ) mur en béton est en cours de durcissement par réaction chimique (hydratation du ciment). Cette réaction est exothermique ( $q > 0$ ,  $\text{w/m}^3$ ), les deux surfaces sont gardées à la température ambiante. Calculez la température maximale à l'intérieure, pour le cas stationnaire.

$$\left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\dot{q}}{\lambda}$$

$$= 0 \quad = 0 \quad = 0$$

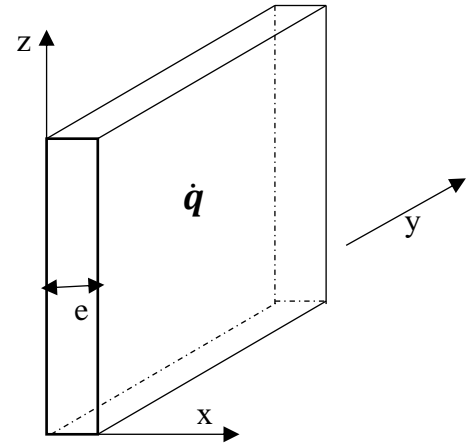
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{\dot{q}}{\lambda} \text{ alors } \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{qx}{\lambda} + c_1 \text{ et } \theta_x = -\frac{qx^2}{2\lambda} + c_1 x + c_2$$

Conditions aux limites:

$$\theta_{(x=0)} = \theta_a \text{ et } \theta_{(x=e)} = \theta_a \quad (\theta_a : \text{température ambiante})$$

$$\theta_x = -\frac{qx^2}{2\lambda} + c_1 x + c_2 \text{ pour } x = 0 ; \theta_a = -0 + 0 + c_2 \text{ donc } c_2 = \theta_a$$

$$\text{pour } x = e ; \theta_a = -\frac{qe^2}{2\lambda} + c_1 e + \theta_a \text{ donc } c_1 = \frac{qe}{2\lambda}$$



Donc l'équation s'écrit:  $\theta_x = -\frac{qx^2}{2\lambda} + \frac{qe}{2\lambda}x + \theta_a$

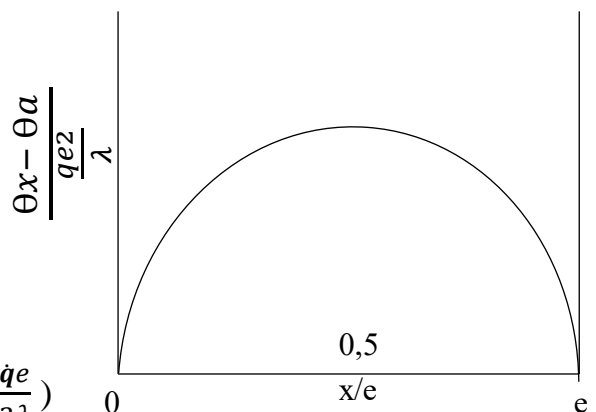
L'équation sans dimension:

$$\frac{\theta_x - \theta_a}{\frac{qe^2}{\lambda}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{x}{e} - \left( \frac{x}{e} \right)^2 \right]$$

La densité du flux de chaleur en fonction de  $x$ :

$$\rho_{(x)} = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = \lambda \left[ \frac{\dot{q}}{\lambda} \cdot x - \frac{qe}{2\lambda} \right] ; \left( \text{avec } \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\dot{q}}{\lambda} \cdot x - \frac{qe}{2\lambda} \right)$$

$$\text{Pour } x = 0 \quad \rho_{(x=0)} = -\frac{\dot{q}e}{2} \quad \text{et} \quad \text{pour } x = e \quad \rho_{(x=e)} = \frac{\dot{q}e}{2}$$



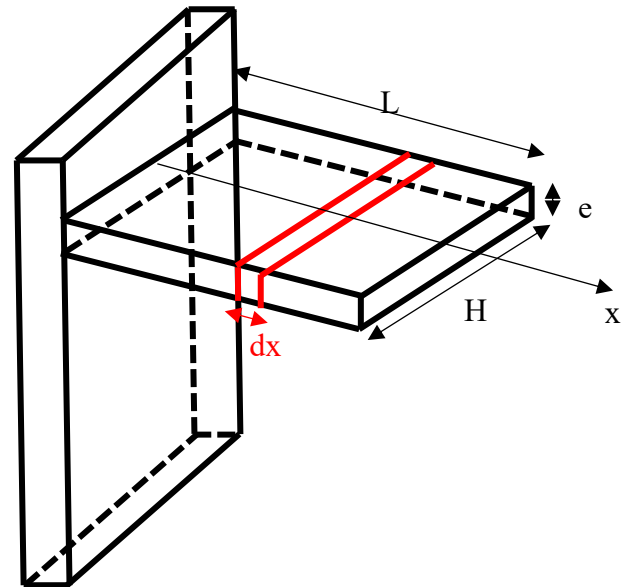
La différence entre les deux équations est seulement le signe – ou la direction du flux. Pour  $x = e/2$ , la densité du flux devient nulle, le gradient de température est aussi nul à cet endroit.

### 3°) EQUATION DE L'AILETTE :

L'ailette a pour fonction d'amplifier les échanges de chaleur entre un mur plan et un fluide extérieur. Le transfert entre l'ailette et le mur se fait par conduction, alors que les échanges avec le fluide extérieur ont lieu par convection.

Un exemple très contemporain de ce type d'application est le refroidissement des microprocesseurs, dont la tendance à l'échauffement est combattue par un abaissement de la tension de fonctionnement, d'une part, et par des radiateurs à ailettes, et d'autre part. (Échangeurs de chaleur à ailettes)

Considérons une ailette d'épaisseur  $e$ , de largeur  $H$ . l'épaisseur est supposée être petite par rapport à la longueur  $L$  et à la largeur  $H$ . On néglige toutes les variations de température sur une section droite de l'ailette, et on suppose que  $\theta$  est fonction de la seule distance  $x$  par rapport au mur.



$$e \ll \ll L \text{ et } H$$

$$\theta = f(x)$$

$\theta_F$  : température de l'air

$\theta_0$  : température du mur, donc de l'ailette à  $x = 0$

$\lambda$  : conductivité thermique de l'ailette

$h$  : coefficient de transmission ailette-air

Considérons le petit volume en forme de parallélépipède de largeur  $H$ , d'épaisseur  $e$  et de longueur  $dx$ .

Il reçoit la chaleur par conduction, du côté du mur sur une surface  $W = H \cdot e$  ; de même il cède de la chaleur par la face opposée de surface  $W$ .

Il cède de la chaleur par convection sur une surface  $S = P \cdot dx$ , où  $P = 2(H + e)$  est le périmètre.

Sur ce petit volume, le bilan thermique va s'écrire :

$$\rho(x) \cdot W - \rho(x+dx) \cdot W - hS(\theta_x - \theta_F) = 0$$

$$\rho(x) = -\lambda \frac{d\theta}{dx} \quad \text{et} \quad \rho(x+dx) = \rho(x) + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx$$

$$\rho(x) - \rho(x+dx) = -\frac{\partial \rho}{\partial x} dx \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\lambda \frac{d^2\theta}{dx^2}$$

$$\text{Donc : } \rho_{(x)} - \rho_{(x+dx)} = - \left( -\lambda \frac{d^2\theta x}{dx^2} \right) dx$$

$$\text{l'équation du bilan devient alors : } \left[ - \left( -\lambda \frac{d^2\theta x}{dx^2} \right) dx \right] W - hP dx (\theta_x - \theta_F) = 0$$

$$\left( \lambda \frac{d^2\theta x}{dx^2} \right) \frac{dx.W}{hP dx} - \frac{hP dx}{hP dx} (\theta_x - \theta_F) = 0$$

$$\frac{d^2\theta x}{dx^2} \cdot \frac{\lambda.W}{hP} - (\theta_x - \theta_F) = 0 \quad \frac{\lambda.W}{hP} = m^2 ; [L^2]$$

$$T = (\theta_x - \theta_F) \quad \text{et} \quad \frac{\lambda.W}{hP} = D^2 \quad \text{et} \quad X = x/D \quad (\text{sans dimension})$$

$$\frac{d^2T}{dX^2} - T = 0 \quad : \text{équation différentielle du second ordre}$$

Notons que T à la dimension d'une température et que X est sans dimension.

La solution de l'équation différentielle du second ordre est du type :

$$A \cosh(X) + B \sinh(X) = T$$

On détermine A et B à partir des conditions aux limites :

$$x = 0 \text{ donne } X = 0 \text{ et } \theta_0 - \theta_F = 0 \text{ donc } A = T_0$$

$$x = L \text{ donne } X = L/D \text{ et } \frac{d\theta}{dx} = 0 \text{ (en négligeant la transmission de chaleur au bout de l'ailette)}$$

$$\left[ \frac{dT}{dX} \right]_{X=L/D} = T_0 \cdot \text{sh}(L/D) + B \cdot \text{ch}(L/D) = 0$$

La distribution des températures s'écrit :

$$T = T_0 \cdot \left[ \cosh(X) - \frac{\text{sh}\left(\frac{L}{D}\right)}{\text{ch}\left(\frac{L}{D}\right)} \cdot \text{sh}(X) \right] = T_0 \cdot \frac{\cosh\left[\left(\frac{L}{D}\right) - X\right]}{\cosh\left(\frac{L}{D}\right)}$$

$$\theta_x = \theta_F + (\theta_0 - \theta_F) \frac{\cosh\left(\frac{L-x}{D}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{D}\right)}$$

La température à l'extrémité ( $x = L$ ) s'écrit :

$$\theta_L = \theta_F + \frac{\theta_0 - \theta_F}{\cosh\left(\frac{L}{D}\right)}$$

L'écoulement de la chaleur à l'intérieure de l'ailette, pour  $x = 0$  est donné par :

$$\phi = \frac{\lambda W}{D} (\theta_0 - \theta_F) \text{th}\left(\frac{L}{D}\right)$$

Le rendement d'une ailette est défini comme étant le rapport entre la chaleur réellement transmise à travers l'ailette et la chaleur qui serait transmise par convection ou rayonnement à partir de la base de la tige, si l'ailette était supprimée :

$$\eta = \frac{\frac{\lambda W}{D} (\theta_0 - \theta_F) \operatorname{th}(L/D)}{hW(\theta_0 - \theta_F)} = \frac{\lambda}{Dh} \operatorname{th}(L/D)$$

Avec  $1/D = \sqrt{\frac{hP}{\lambda W}}$

$$\eta = \sqrt{\frac{P\lambda}{Wh}} \cdot \operatorname{th}\left[L \cdot \sqrt{\frac{hP}{\lambda W}}\right]$$

Si  $e \ll H$  :  $P/W = \frac{2(H+e)}{H+e} = \frac{2H}{He} = 2/e$  et  $\eta = \sqrt{\frac{2\lambda}{eh}} \cdot \operatorname{th}\left[L \cdot \sqrt{\frac{2h}{e\lambda}}\right]$

### *Choix de l'ailette*

Les ailettes sont utilisées lorsqu'il faut extraire une densité de flux importante dans un encombrement réduit, exemples : radiateurs d'automobiles, carter de moteur refroidit par l'air, évaporateur de climatiseur.....

D'une façon générale, l'usage des ailettes est ;

- Peu utile pour les liquides car  $h$  (le coefficient de convection) est grand
- Utile pour les gaz car  $h$  (le coefficient de convection) est faible

Des ailettes étroites et rapprochées sont meilleures que des ailettes plus grandes et espacées, mais ont limité par les pertes de charge (elles augmentent si l'on diminue trop l'écartement des ailettes). L'ailette est d'autant plus performante que sa conductivité thermique est élevée. Le choix de l'ailette est alors un compromis entre le coût, l'encombrement, les pertes de charge et le transfert de chaleur.

#### 4°) TD SERIE IV

**IV.1°)** Considérons un volume élémentaire  $dv = (dx.dy.dz)$  immobile et un système d'axe (xyz).  $\lambda$ ,  $\rho$  et  $c_p$  sont constantes et respectivement la conductivité thermique la masse volumique et la chaleur spécifique du volume élémentaire.  $\dot{q}$  est la densité volumique d'énergie générée.

Etablissez le bilan thermique en régime transitoire.

**IV.2°)** Un long et mince (épaisseur :  $e = 20$  cm) mur en béton ( $\lambda = 4$  W/m.°C) est en cour de durcissement par réaction chimique (hydratation du ciment). Cette réaction est exothermique ( $\dot{q} = 2000$  W/m<sup>3</sup>). Les deux faces extérieures sont gardées à la température ambiante (20 °C). Calculez la température et la densité de flux de chaleur au milieu du mur ( $e/2$ ) pour le cas stationnaire.

**IV.3°)** Soit une ailette de forme cylindrique d'axe ox, de longueur L, de section W et de périmètre P. L'aillette est constituée d'un matériau homogène isotope sans génération interne de chaleur de conductivité  $\lambda$ . A sa base ( $x = 0$ ) l'aillette est en contact parfait avec un réservoir de chaleur à température constante  $\theta_0$ . L'aillette échange de la chaleur par convection avec le milieu extérieur à la température  $\theta_f$ . Le coefficient de convection h est supposé constant. Le bout de l'aillette est isolé.

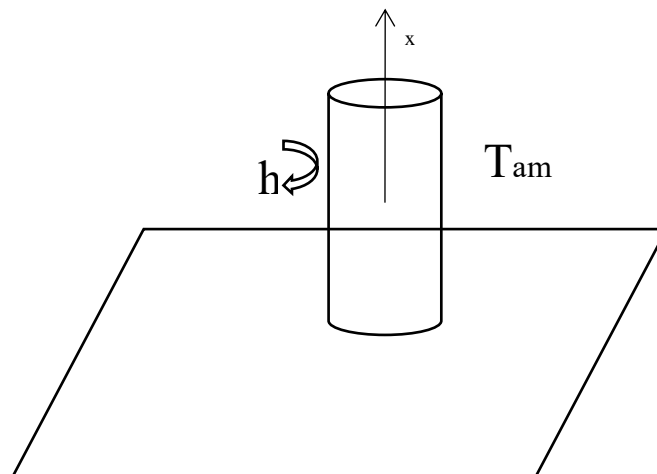
**a°)** Ecrire le bilan thermique relatif à un élément de l'aillette compris entre x et x + dx et en déduire l'équation aux dérivées pour un régime établi.

**b°)** Si le flux de chaleur à l'intérieur de l'aillette est donné par :  $\phi = th(L/D).\lambda.W.(\theta_0 - \theta_f)/D$

Calculer l'efficacité de l'aillette sachant que  $D^2 = \lambda.W/h.P$

le coefficient de convection:  $h = 155$  w/ °C.m<sup>2</sup>; la conductivité thermique:  $\lambda = 389$  w/°C.m;  
longueur:  $L = 38$  cm; diamètre:  $d = 10$  mm

**IV.4\*)** Un système de freinage peut être simulé par le dispositif suivant :



Une tige de section  $\Omega$  et de longueur semi-infinie prend appui avec une force  $F$  sur une surface plane. Cette tige se déplace sur cette plaque à la vitesse  $v$ . La force de frottement ainsi appliquée est proportionnelle à la vitesse de déplacement et à la section de contact :  $F = \alpha v \Omega$ . Ce frottement engendre une dissipation de chaleur (la puissance dissipée est totalement transmise à la tige). La puissance dissipée  $P$  est alors proportionnelle à la force de frottement et à la vitesse :  $P = \alpha \Omega v^2$ .

**a\*)** Déterminer l'expression du profil de température dans la tige en considérant la tige comme une ailette de dimension semi-infinie, et en supposant que l'air ambiant est à la température  $T_{amb}$  et que le coefficient d'échange convectif est  $h$ . On admettra que la température du barreau est uniforme transversalement et qu'elle ne dépend que de  $x$ .

**b\*)** Vérifier que la puissance dissipée par la surface latérale de l'ailette correspond à la puissance dégagée par frottement.

**c\*)** Calculer la température à la base de l'ailette.

**Données :**

$$\lambda_{tige} = 40 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$$

$$h = 20 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_{amb} = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$P = 25 \text{ W/m}^2$$

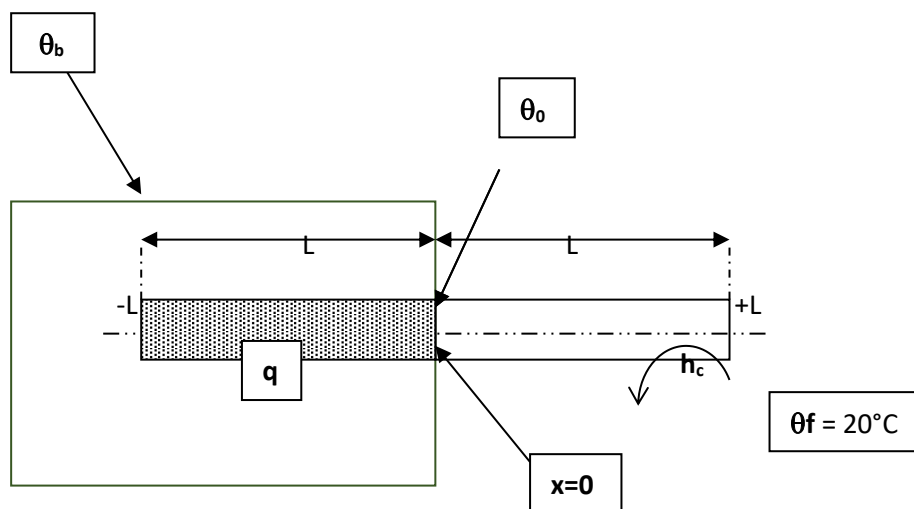
$$\text{Rayon de la tige : } R = 1 \text{ cm}$$

**IV.5°)** Une tige de métal de longueur  $2L = 0.1$  m, de diamètre  $D = 5$  mm, et de conductivité thermique  $\lambda = 25$  W/m.°C, est insérée dans une paroi parfaitement isolante, tandis que la moitié de sa longueur est exposée à un courant d'air qui est à la température  $\theta_f = 20$  °C avec un coefficient de convection  $h_c = 100$  W/m<sup>2</sup>.°C à la surface de la tige.

Un champ électromagnétique induit une production d'énergie calorifique à un débit uniforme  $\dot{q} = 10^6$  W/m<sup>3</sup> à l'intérieur de la partie insérée de la tige.

On considère les transferts de chaleur en monodimensionnel, l'origine étant prise à la base de l'encastrement.

- a°) Calculez le flux de chaleur évacué à la base de l'ailette
- b°) Déterminez le profil de température de l'ailette
- c°) Calculez la température à la base de l'ailette
- d°) Déterminez le profil de température dans la partie insérée
- e°) Calculez la température à l'extrémité de la deuxième moitié de la tige insérée

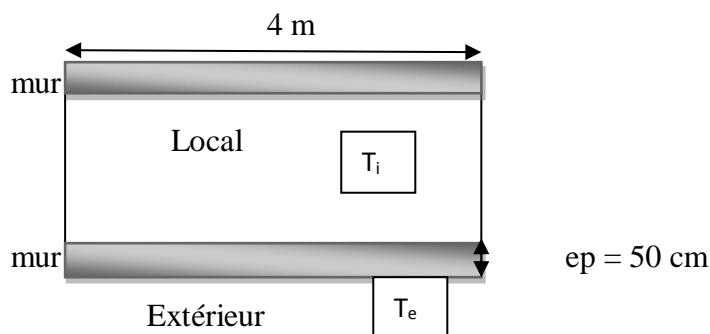




**IV.6°)** Un local de 4 m de long, 3 m de large et 2,4 m de hauteur est séparé par 2 murs d'épaisseur  $e_p = 50$  cm et de conductivité thermique  $\lambda = 0,4$  W/m.°C.

L'intérieur de la salle est maintenu à une température ( $T_i$ ) de 20 °C, grâce à un système de chauffage (radiateur muni d'ailettes à circulation d'eau). Le coefficient de convection interne est  $h_1 = 1,5$  W/m<sup>2</sup>.°C.

L'air extérieur est à une température ( $T_e$ ) de 5°C, le coefficient de convection externe est  $h_2 = 2$  W/m<sup>2</sup>.°C.



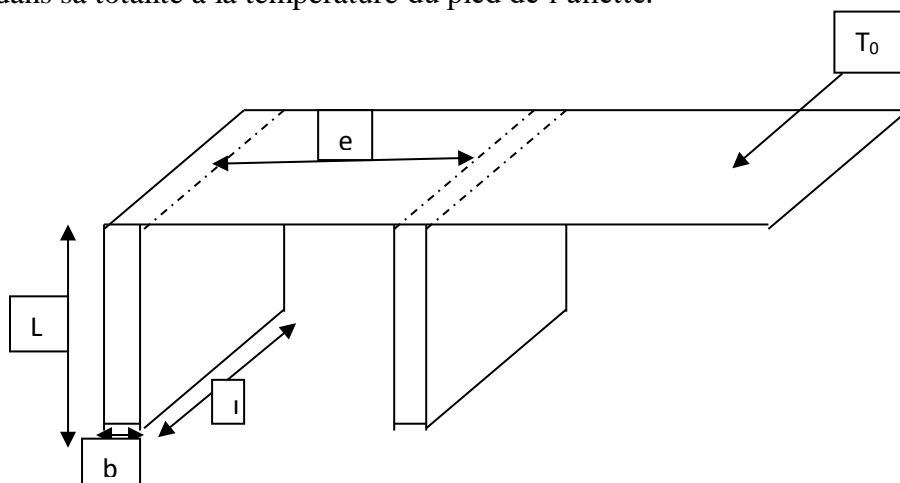
*Vue de dessus du local*

**a°)** Calculez la densité de flux de chaleur perdue par chaque mur.

**b°)** Le système de chauffage est constitué d'un radiateur muni d'ailettes rectangulaires ( $L = 70$  cm,  $l = 10$  cm,  $b = 1$  cm) et espacées régulièrement de  $e = 2$  cm.

La température à la base de l'ailette est  $T_0 = 75$  °C. L'efficacité de l'ailette est  $\eta = 0,35$

= Flux évacué par l'ailette/Flux idéal. Le Flux idéal étant le flux évacué par l'ailette, si celle-ci était dans sa totalité à la température du pied de l'ailette.



Calculez le nombre d'ailettes nécessaire pour compenser le flux de déperdition à travers les deux murs du local.

**IV.7°)** On se propose d'évaluer la puissance thermique nécessaire au maintien de la surface d'un tapis de billard à une température  $T_p$  supérieure à la température ambiante  $T_a$  (cela garantit au roulement des boules un caractère uniforme et constant). On modélise le billard sous la forme de trois couches superposées constituées

- d'un élément chauffant, d'épaisseur  $e_1$ , de conductivité thermique moyenne  $\lambda_1$ , à l'intérieur duquel circulent des résistances électriques uniformément réparties ;
- d'une plaque de marbre, d'épaisseur  $e_2$ , de conductivité thermique  $\lambda_2$  ;
- du tapis de billard, d'épaisseur  $e_3$ , de conductivité thermique  $\lambda_3$  .

Les dimensions du billard (longueur  $L = 2,8$  m, largeur  $l = 1,25$  m) permettent de supposer que la température ne dépend que de la dimension  $x$ .

Le coefficient d'échange convectif,  $h$ , est uniforme et sa valeur est la même en-dessous et au-dessus du billard.

**a°)** Calculer le débit de chaleur échangé entre le tapis et le milieu ambiant.

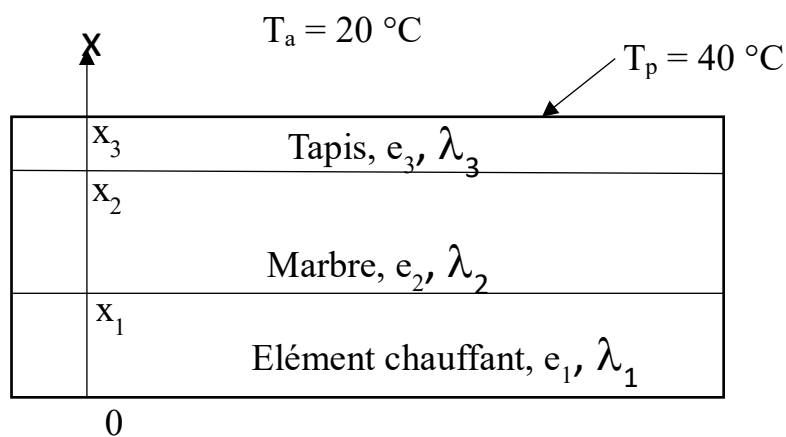
**b°)** Déterminer les différentes températures aux surfaces de contact.

**c°)** Calculer la valeur de la puissance thermique  $\Phi$  dissipée par effet Joule à l'intérieur de l'élément chauffant pour maintenir la surface du tapis à la température  $T_p$ .

**d°)** Déterminer la température à la surface inférieure ( $x = 0$ ).

Données numériques :  $T_p = 40^\circ\text{C}$  ;  $T_a = 20^\circ\text{C}$  ;  $h = 10$  W/m<sup>2</sup>.°C

$e_1 = 4$  cm ;  $e_2 = 5$  ; cm ;  $e_3 = 2$  mm ;  $\lambda_1 = 12$  W/m.°C ;  $\lambda_2 = 2,5$  W/m.°C ;  $\lambda_3 = 0,5$  W/m.°C



**IV.8•)** La croûte continentale terrestre a une épaisseur  $e$  d'environ 35 Km. On peut la considérer comme équivalente à une couche homogène de conductivité  $\lambda=23 \text{ w/m } ^\circ\text{C}$ . Au niveau du sol, la température est  $\theta_0 = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$ , et à la profondeur  $e$ , elle vaut  $\theta_e = 600 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

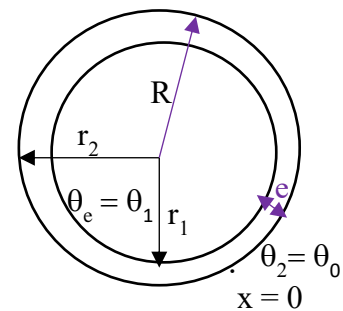
**a•)** Exprimer la densité de flux de chaleur  $\mathbf{p}$  issue de la croûte continentale, en fonction du rayon terrestre  $R$  et de l'épaisseur  $e$  de cette croûte (ainsi que  $\lambda$ ,  $\theta_0$  et  $\theta_e$ ).

**b•)** En considérant que l'épaisseur  $e$  est très petite devant le rayon  $R$  ( $e \ll R$ ). Exprimez la densité du flux de chaleur en fonction de  $e$  (ainsi  $\lambda$ ,  $\theta_0$  et  $\theta_e$ ), en déduire que le problème pourra être traité en géométrie plane.

**c•)** En fait, il faut tenir compte du caractère radioactif des éléments de la croûte continentale terrestre qui dissipent une puissance interne volumique supposée uniformément répartie  $\dot{q}=2,25 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^3$ . Déterminer le profil de la température de la croûte.

**d•)** Représenter graphiquement ce profil. A quelle profondeur la température est maximale ?

**e•)** En déduire puissance géothermique par unité de surface au niveau du sol, quand on tient compte des éléments radioactifs.



### IV.1\*) cours

### IV.2\*)

$$\left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\dot{q}}{\lambda}$$

La propagation de la chaleur se fait uniquement dans la direction x, donc :  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$  et  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$

Le régime est permanent :  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$

Dans ce cas :  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{\dot{q}}{\lambda}$  alors  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{qx}{\lambda} + c_1$  et  $\theta_x = -\frac{\dot{q}x^2}{2\lambda} + c_1x + c_2$

Conditions aux limites:

$$\theta_{(x=0)} = \theta_a \text{ et } \theta_{(x=e)} = \theta_a \quad (\theta_a : \text{température ambiante})$$

$$\theta_x = -\frac{qx^2}{2\lambda} + c_1x + c_2 \text{ pour } x=0 ; \theta_a = -0 + 0 + c_2 \text{ donc } c_2 = \theta_a$$

$$\text{pour } x=e ; \theta_a = -\frac{qe^2}{2\lambda} + c_1e + \theta_a \text{ donc } c_1 = \frac{qe}{2\lambda}$$

$$\theta_x = -\frac{qx^2}{2\lambda} + \frac{qe}{2\lambda}x + \theta_a \text{ pour } x=e/2 : \text{ on aura } \theta_{e/2} = -\frac{q(e/2)^2}{2\lambda} + \frac{qe}{2\lambda}(e/2) + \theta_a =$$

$$\theta_{e/2} = \frac{qe^2}{8\lambda} + \theta_a = 22,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

La densité du flux de chaleur en fonction de x:

$$\rho_{(x)} = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = \lambda \left[ \frac{\dot{q}}{\lambda} \cdot x - \frac{qe}{2\lambda} \right] ; \left( \text{avec } \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\dot{q}}{\lambda} \cdot x - \frac{qe}{2\lambda} \right)$$

$$\rho_{(x=e/2)} = \lambda \left[ \frac{\dot{q}}{\lambda} \cdot e/2 - \frac{qe}{2\lambda} \right] = 0$$

### IV.3\*)

#### a\*) bilan thermique

L'ailette de forme cylindrique reçoit la chaleur par conduction, du côté du réservoir de chaleur sur une surface  $W = \pi D^2/4$  ; de même il cède de la chaleur par la face opposée de surface  $W$ .

Il cède de la chaleur par convection sur une surface  $S = P \cdot dx$ , où  $P = \pi D$  est le périmètre.

Sur ce petit volume, le bilan thermique va s'écrire :

$$\rho_{(x)} \cdot W - \rho_{(x+dx)} \cdot W - hS(\theta_x - \theta_F) = 0$$

$$\rho_{(x)} = -\lambda \frac{d\theta_x}{dx} \quad \text{et} \quad \rho_{(x+dx)} = \rho_{(x)} + \frac{\partial \rho_x}{\partial x} dx$$

$$\rho_{(x)} - \rho_{(x+dx)} = - \frac{\partial \rho x}{\partial x} dx \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho x}{\partial x} = -\lambda \frac{d^2 \theta x}{dx^2}$$

$$\text{Donc : } \rho_{(x)} - \rho_{(x+dx)} = - \left( -\lambda \frac{d^2 \theta x}{dx^2} \right) dx$$

$$\text{l'équation du bilan devient alors : } \left[ - \left( -\lambda \frac{d^2 \theta x}{dx^2} \right) dx \right] W - hP dx (\theta_x - \theta_F) = 0$$

$$\left( \lambda \frac{d^2 \theta x}{dx^2} \right) \frac{dx \cdot W}{hP dx} - \frac{hP dx}{hP dx} (\theta_x - \theta_F) = 0$$

$$\frac{d^2 \theta x}{dx^2} \cdot \frac{\lambda \cdot W}{hP} - (\theta_x - \theta_F) = 0 \quad \frac{\lambda \cdot W}{hP} = m^2 ; [L^2]$$

$$T = (\theta_x - \theta_F) \quad \text{et} \quad \frac{\lambda \cdot W}{hP} = D^2 \quad \text{et} \quad X = x/D \quad (\text{sans dimension})$$

$$\frac{d^2 T}{dX^2} - T = 0 \quad : \text{équation différentielle du second ordre}$$

Notons que T à la dimension d'une température et que X est sans dimension.

La solution de l'équation différentielle du second ordre est du type :

$$A \cosh(X) + B \sinh(X) = T$$

### b\*) L'efficacité de l'ailette

L'écoulement de la chaleur à l'intérieure de l'ailette, pour  $x = 0$  est donné par :

$$\phi = \frac{\lambda W}{D} (\theta_0 - \theta_F) \text{th}(L/D)$$

Le rendement d'une ailette est défini comme étant le rapport entre la chaleur réellement transmise à travers l'ailette et la chaleur qui serait transmise par convection ou rayonnement à partir de la base de la tige, si l'ailette était supprimée :

$$\eta = \frac{\frac{\lambda W}{D} (\theta_0 - \theta_F) \text{th}(L/D)}{hW(\theta_0 - \theta_F)} = \frac{\lambda}{Dh} \text{th}(L/D)$$

$$\text{Avec } 1/D = \sqrt{\frac{hP}{\lambda W}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{P\lambda}{Wh}} \cdot \text{th}\left[ L \cdot \sqrt{\frac{hP}{\lambda W}} \right]$$

$$\eta = 31,68$$

**IV.4\*)****a\*) Profil de température**

On considère la tige comme une ailette de dimension semi-infinie (Longueur très grande) ;

On suppose que le débit de chaleur en bout de l'ailette est nul ;

$$D^2 = \lambda W / hP = \lambda \pi R^2 / h 2 \pi R = \lambda R / 2h = 0,1 \text{ m}$$

$$T = \theta_x - \theta_f$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - T = 0$$

La solution de l'équation différentielle du second ordre est du type

$$T = A \cdot \text{ch}(x/D) + B \cdot \text{sh}(x/D)$$

Conditions aux limites:

$$T = T_0 \text{ pour } x = 0 : T_0 = \theta_0 - \theta_f$$

$$dT/dx = 0 \text{ pour } x = L : dT/dx = 0$$

$$T = A \cdot \text{ch}(x/D) + B \cdot \text{sh}(x/D) : dT/dx = A \frac{1}{D} \text{sh}(x/D) + B \frac{1}{D} \text{ch}(x/D)$$

$$A = T_0 \text{ et } B = -T_0 \quad B = -T_0 \cdot \text{th}(L/D) = -T_0 \quad [\text{th}(L/D) \text{ tends vers } 1 \text{ puisque } L \text{ est grande}]$$

$$\text{avec } T_0 = \theta_0 - \theta_f$$

$$\text{Donc : } T = T_0 \cdot [\text{ch}(x/D) - \text{sh}(x/D)]$$

$$T = T_0 \cdot \left( \frac{e^{\frac{x}{D}} + e^{-\frac{x}{D}}}{2} - \frac{e^{\frac{x}{D}} - e^{-\frac{x}{D}}}{2} \right) = T_0 \cdot e^{-\frac{x}{D}}$$

$$\text{Comme } T = \theta_x - \theta_f \text{ et } T_0 = \theta_0 - \theta_f \quad \text{alors : } \theta_x = \theta_f + (\theta_0 - \theta_f) \cdot e^{-\frac{x}{D}}$$

**b\*) Puissance dissipée**

$$\theta_x = \theta_f + (\theta_0 - \theta_f) \cdot e^{-\frac{x}{D}} \quad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{D} (\theta_0 - \theta_f) \cdot e^{-\frac{x}{D}}$$

$$\text{Pour } x = 0 \quad \phi_0 = -\lambda \cdot w \cdot \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{D} (\theta_0 - \theta_f) \cdot e^{-\frac{0}{D}} \cdot (-\lambda \cdot \pi R^2) \quad e^{-\frac{0}{D}} = 0$$

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{2h}{R\lambda}} (\theta_0 - \theta_f) \lambda \cdot \pi R^2 = \pi R \sqrt{2R h \lambda} \cdot (\theta_0 - \theta_f)$$

$$\text{puissance dégagée par frottement : } \phi_0 = \pi R \sqrt{2R h \lambda} \cdot (\theta_0 - \theta_f)$$

Sur la surface latérale :

$$\phi_L = \int_0^L h(\theta_x - \theta_f) P dx \quad \text{et } [\theta_x = \theta_f + (\theta_0 - \theta_f) \cdot e^{-\frac{x}{D}}] \quad \text{donc} \quad \phi_L = \int_0^L hP(\theta_0 - \theta_f) e^{-\frac{x}{D}} dx$$

$$\phi_L = hP(\theta_0 - \theta_f) \int_0^L e^{-\frac{x}{D}} dx = -D(e^{-\frac{L}{D}} - 1) = D \quad [\text{lorsque } L \text{ est grand : } e^{-\frac{L}{D}} \text{ tend vers } 0]$$

Dans ce cas :  $\phi_L = DhP(\theta_0 - \theta_f)$  avec  $P = 2\pi R$  on obtient  $\phi_L = \sqrt{\frac{R\lambda}{2h}} h2\pi R(\theta_0 - \theta_f)$

**La puissance dissipée par la face latérale:**

$$\phi_L = \pi R \sqrt{2Rh\lambda} \cdot (\theta_0 - \theta_f)$$

**Egale à la puissance dégagée par frottement**

**c\*) Température à la base de l'ailette**

$$\phi_0 = P_{\text{dissipée}} \cdot w = \pi R \sqrt{2Rh\lambda} \cdot (\theta_0 - \theta_f) : \quad \theta_0 = \theta_f + \frac{P_{\text{diss}} \cdot w}{\pi R \sqrt{2Rh\lambda}} \quad w = \pi R^2 \text{ donc}$$

$$\theta_0 = \theta_f + \frac{P_{\text{diss}} \cdot R}{\sqrt{2Rh\lambda}} \quad : \quad \theta_0 = \theta_f + P_{\text{dissipée}} \cdot \sqrt{\frac{R}{2h\lambda}} \quad :$$

$\theta_0 = 20,1 \text{ } ^\circ\text{C}$  il n'y a pas d'échauffement car la température varie à peine de  $0,1 \text{ } ^\circ\text{C}$

**IV.5\*)**

**a\*) Le flux de chaleur évacué à la base de l'ailette**

$$\phi_0 = \dot{q} \cdot v = \dot{q} wL = 10^{+6} \cdot \frac{0,1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} (5 \cdot 10^{-3})^2 = \mathbf{0,981 \text{ w}}$$

**b\*) Profil de température de l'ailette**

$$\frac{d^2T}{dx^2} - T = 0$$

La solution de l'équation différentielle du second ordre est du type

$$T = A \cdot \text{ch}(x/D) + B \cdot \text{sh}(x/D)$$

Conditions aux limites:

$$T = T_0 \text{ pour } x = 0 : \quad T_0 = \theta_0 - \theta_f$$

$$dT/dx = 0 \text{ pour } x = L : \quad dT/dx = 0$$

$$T = A \cdot \text{ch}(x/D) + B \cdot \text{sh}(x/D) : \quad dT/dx = A \frac{1}{D} \text{sh}(x/D) + B \frac{1}{D} \text{ch}(x/D)$$

$$A = T_0 \text{ et } B = -T_0 \quad B = -T_0 \cdot \text{th}(L/D) = -T_0 \quad [\text{th}(L/D) \text{ tends vers } 1 \text{ puisque } L \text{ est grande}]$$

$$\text{avec } T_0 = \theta_0 - \theta_f$$

$$\text{Donc : } T = T_0 \cdot [\text{ch}(x/D) - \text{sh}(x/D)]$$

$$T = T_0 \cdot \left( \frac{e^{\frac{x}{D}} + e^{-\frac{x}{D}}}{2} - \frac{e^{\frac{x}{D}} - e^{-\frac{x}{D}}}{2} \right) = T_0 \cdot e^{-\frac{x}{D}}$$

$$\text{Comme } T = \theta_x - \theta_f \text{ et } T_0 = \theta_0 - \theta_f$$

Alors :  $\theta_x = \theta_f + (\theta_0 - \theta_f) \cdot e^{\frac{-x}{D}}$  Profil de température de l'ailette

c°) Température à la base de l'ailette

$$x = 0 \quad \phi_0 = \dot{q} wL = 0,921 = -\lambda \cdot w \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{\lambda}{D} (\theta_0 - \theta_f) \cdot w$$

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{2h}{R\lambda}} (\theta_0 - \theta_f) \cdot \lambda \pi R^2 = \dot{q} wL ; \quad \phi_0 = \sqrt{\frac{2h}{R\lambda}} (\theta_0 - \theta_f) \cdot \lambda = \dot{q} \cdot L$$

$$\theta_0 = \frac{qL}{\lambda} \sqrt{\frac{R\lambda}{2h}} + \theta_f = qL \sqrt{\frac{R}{2h\lambda}} + \theta_f = \mathbf{55,4 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

d°) Profil de température dans la partie insérée

$$\left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\dot{q}}{\lambda}$$

La propagation de la chaleur se fait uniquement dans la direction x, donc :  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$  et  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$

Le régime est permanent :  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$

$$\text{Dans ce cas : } \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{\dot{q}}{\lambda} \quad \text{alors } \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{qx}{\lambda} + c_1 \quad \text{et} \quad \theta_x = \frac{\dot{q}x^2}{2\lambda} + c_1x + c_2$$

Conditions aux limites:

$$X = 0 \quad ; \quad \theta_{(x=0)} = \theta_0 \quad \text{donc } c_2 = \theta_0$$

$$x = -L \quad \frac{d\theta}{dx} = -\left(\frac{q}{\lambda}\right)(-L) + c_1 ; \quad c_1 = -\frac{qL}{\lambda}$$

$$\theta_x = -\frac{q}{2\lambda} \cdot x^2 - \frac{qL}{2\lambda} x + \theta_0 \quad : \text{Profil de température dans la partie insérée}$$

e°) Température à l'extrémité de la deuxième moitié de la tige insérée ( $\theta_b$ )

$$\theta_{(-L)} = -\frac{q}{2\lambda} \cdot (-L)^2 - \frac{qL}{2\lambda} (-L) + \theta_0$$

$$\theta_{(-L)} = (\theta_b) = \frac{q \cdot L^2}{2\lambda} + \theta_0 = \mathbf{105,4 \text{ } ^\circ\text{C}} \quad \text{avec } \theta_0 = qL \sqrt{\frac{R}{2h\lambda}} + \theta_f = \mathbf{55,4 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

$$(\theta_b) = \mathbf{105,4 \text{ } ^\circ\text{C}}$$



**IV.6°)****a°) La densité de flux de chaleur perdue par chaque mur**

$$\rho = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2}} = 6,21 \text{ w/m}^2$$

Flux de chaleur perdue par les deux murs

$$S_{\text{mur}} = L.H = 4. 2,4 = 9,6 \text{ m}^2$$

$$\Phi = 2. \rho. S_{\text{mur}} = 119,2 \text{ w}$$

**b°) Nombre d'ailettes nécessaire pour compenser le flux de déperdition à travers les deux murs du local**

N : nombre d'ailettes

 $\Phi_a$  : flux de chaleur évacué par une ailette $\Phi_{i-a}$  : flux de chaleur évacué par l'espace entre les ailettes

$$\Phi = N.\Phi_a + (N - 1).\Phi_{i-a} \quad ; \quad N = \frac{\phi + \phi_{i-a}}{\phi_a + \phi_{i-a}}$$

Surface d'une ailette :  $S_{ai} = 2.L(I + b)$ 

$$\Phi_a = \eta.h_i.S_{ai}(T_0 - T_i) = 4,447 \text{ w} \quad (\eta : \text{efficacité d'une ailette})$$

Surface de l'espace :  $S_{i-a} = e.I$ 

$$\Phi_{i-a} = h_i.S_{i-a}(T_0 - T_i) = 0,165 \text{ w}$$

$$N = \frac{\phi + \phi_{i-a}}{\phi_a + \phi_{i-a}} = 26 \text{ ailettes}$$

**IV.7°)****a°) Calculer le débit de chaleur échangé entre le tapis et le milieu ambiant**

$$\Phi = h.S_p(T_p - T_a) = 700 \text{ w}$$

**b°) Températures aux surfaces de contact**

$$\rho = \Phi / S_p = 200 \text{ w/m}^2$$

$$\rho = \frac{T_p - T_a}{\frac{1}{hc}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_2}{\lambda_2}} = \frac{T_1 - T_p}{\frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}} ; \quad T_1 = 44,8 \text{ °C} \quad \text{et} \quad T_2 = 40,8 \text{ °C}$$

**c°) La valeur de la puissance thermique  $\Phi$  dissipée par effet Joule à l'intérieur de l'élément chauffant pour maintenir la surface du tapis à la température  $T_p$** 

$$\left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\dot{q}}{\lambda}$$

La propagation de la chaleur se fait uniquement dans la direction x, donc :  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$  et  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$

Le régime est permanent :  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$

Dans ce cas :  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{\dot{q}}{\lambda_1}$  alors  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{qx}{\lambda_1} + c_1$  et  $\theta_x = -\frac{\dot{q}x^2}{2\lambda_1} + c_1x + c_2$

Conditions aux limites:

$$x = x_1 = e_1 \text{ égalité des flux de chaleur } \rho = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\lambda \left( -\frac{qe_1}{\lambda_1} + c_1 \right) \quad (1)$$

$$\text{Égalité des températures } \theta(x=e_1) = \theta_1 ; \quad \theta_1 = -\frac{\dot{q}e_1^2}{2\lambda_1} + e_1c_1 + c_2 \quad (2)$$

$$x = 0 \text{ égalité des flux de chaleur ; } \rho = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = -hc(\theta_0 - \theta_a)$$

$$-\lambda_1 \left( -\frac{qx}{\lambda_1} + c_1 \right) = -hc \left[ \left( -\frac{\dot{q}x^2}{2\lambda_1} + c_1x + c_2 \right) - \theta_a \right]$$

$$x = 0 \text{ alors : } -\lambda_1.c_1 = -hc[c_2 - \theta_a] \quad (3)$$

$$\text{D'après (1) : } c_1 = \frac{qe_1 - \rho}{\lambda_1}$$

$$\text{D'après (3) : } c_2 = \theta_a + \frac{\lambda_1.c_1}{hc} = \theta_a + \frac{qe_1 - \rho}{hc} \quad (4)$$

Dans (2) on remplace les valeurs de  $c_1$  et  $c_2$  ( $\theta_1 = -\frac{\dot{q}(e_1)^2}{2\lambda} + e_1c_1 + c_2$ )

$$\theta_1 = -\frac{\dot{q}(e_1)^2}{2\lambda} + e_1 \frac{qe_1 - \rho}{\lambda_1} + \left( \theta_a + \frac{qe_1 - \rho}{hc} \right) \quad \text{d'autre part } \theta_1 = \theta_p + \rho [(e_2/\lambda_2) + (e_3/\lambda_3)]$$

En combinant ces deux dernières équations :

$$\dot{q} = \frac{\theta_p - \theta_a + \left( \frac{1}{hc} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3} \right) \rho}{\frac{(e_1)^2}{2\lambda_1} + \frac{e_1}{hc}} = 11,180 \text{ Kw/m}^3$$

$$\phi = \dot{q}.v = q.(Lp.lp)e_1 = 11,180.(2,8.1,25).4.10^{-4} = 1565 \text{ w}$$

**a\*) La température à la surface inférieure (x=0):**

Les équations (2) et (4) permettent d'écrire:  $\theta_0 = c_2 = \theta_a + \frac{qe_1 - \rho}{hc} = 44,72^\circ\text{C}$

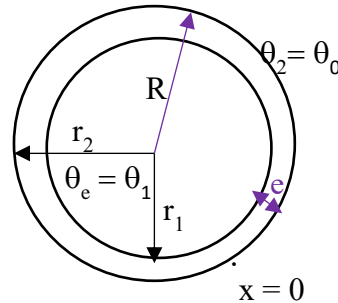
$$c_1 = \frac{qe_1 - \rho}{\lambda_1} = 20,6 \text{ }^\circ\text{C/m} ; \quad c_2 = 44,72^\circ\text{C}$$

$$\theta_x = -\frac{\dot{q}x^2}{2\lambda} + c_1x + c_2$$

Le traçait de la courbe nous permet de situer la température maximale (**44,9°C**) à **x = 2,211 cm**

**IV.8°)**

$$\theta_0 = 0^\circ\text{C} \quad ; \quad \theta_e = 600^\circ\text{C} \quad ; \quad \lambda = 23 \text{ w/m}^\circ\text{C} \quad ; \quad e = 345 \text{ Km}$$

**a°) Densité du flux de chaleur**

$$\phi = \frac{4\pi\lambda}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} (\theta_1 - \theta_2) = \phi = \frac{4\pi\lambda}{\frac{1}{R-e} - \frac{1}{R}} (\theta_e - \theta_0) = \phi = \frac{4\pi\lambda}{R - (R-e)} (\theta_e - \theta_0) (R - e)R$$

$$\phi = \frac{4\pi\lambda}{e} (\theta_e - \theta_0) R^2 (1 - e/R) = \rho = \phi/4\pi R^2 = \frac{\lambda(\theta_e - \theta_0)}{e} (1 - e/R)$$

**b°) Géométrie plane**

$e \lllll R$  dans ce cas  $e/R$  tend vers 0 (35/6370)

$$\rho = \frac{\lambda(\theta_e - \theta_0)}{e} \text{ donc c'est une géométrie plane ; } \rho = \frac{\lambda(\theta_e - \theta_0)}{e} = 0,394 \text{ w/m}^2$$

**c°) Profil de température de la croûte**

Puis que c'est une géométrie plane on peut écrire alors :

$$\left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\dot{q}}{\lambda}$$

$$= 0 \quad = 0 \quad = 0$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{\dot{q}}{\lambda} \text{ alors } \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\dot{q}x}{\lambda} + c_1 \text{ et } \theta_x = -\frac{\dot{q}x^2}{2\lambda} + c_1x + c_2$$

$$\text{Pour } x = 0 \text{ ; } \theta_{(x=0)} = \theta_0 \text{ : } \theta_{x=0} = -\frac{\dot{q}0^2}{2\lambda} + c_1 \cdot 0 + c_2 \text{ : donc } c_2 = \theta_0$$

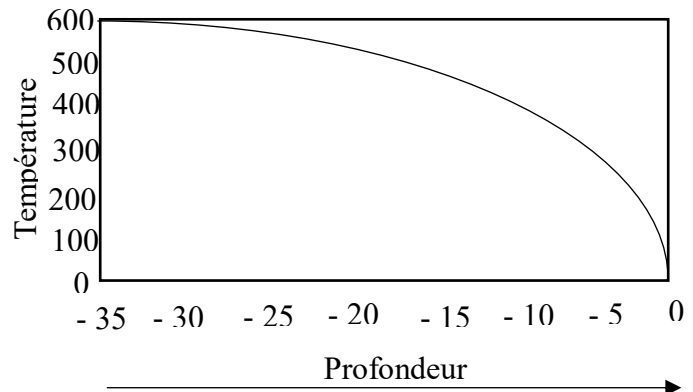
**Le sens positif est pris dans le sens du transfert de chaleur, donc de la diminution de la température :**

$$x = -e \text{ ; } \theta_{(x=-e)} = \theta_e \text{ : } \theta_{(x=-e)} = -\frac{\dot{q}(-e^2)}{2\lambda} - c_1e + c_2$$

$$-c_1 = \frac{\theta e - \theta_0}{e} + \frac{q e}{2\lambda}$$

$$\theta_x = -\frac{\dot{q} x^2}{2\lambda} - \left( \frac{\theta e - \theta_0}{e} + \frac{\dot{q} e}{2\lambda} \right) x + \theta_0$$

*d\*) Représentation graphiquement du profil et profondeur où la température est maximale*



$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 = -\frac{qx}{\lambda} - \left( \frac{\theta e - \theta_0}{e} + \frac{\dot{q} e}{2\lambda} \right) :$$

$$x = -\frac{e}{2} - \left( \frac{\theta e - \theta_0}{e} \right) \frac{\lambda}{\dot{q}} = -35,024 \text{ Km (profondeur de la température maximale)}$$

*e\*) La puissance géothermique par unité de surface au niveau du sol*

$$\rho_x = -\lambda \frac{d\theta}{dx} = -\lambda \left[ -\frac{\dot{q} x}{\lambda} - \left( \frac{\theta e - \theta_0}{e} + \frac{\dot{q} e}{2\lambda} \right) \right]$$

$$\rho_x = \dot{q} \cdot x + \dot{q} \cdot e/2 + \frac{(\theta e - \theta_0)\lambda}{e}$$

$$\rho_{(x=0)} = \dot{q} \cdot e/2 + \frac{(\theta e - \theta_0)\lambda}{e} \quad ; \quad \rho_{(x=0)} = 0,788 \text{ w/m}^2$$

## Chapitre 5 : TRANSFERT THERMIQUE PAR RAYONNEMENT

### 1°) Généralités

Le rayonnement est le mode d'échange de chaleur par émission et absorption des radiations. La propagation de ces radiations qui transportent l'énergie, suit les mêmes lois que celles de la lumière (vitesse identique, réflexion, réfraction, transmission, etc....)

Leurs longueurs d'ondes cependant, sont plus grandes et se situent essentiellement dans le domaine de l'infrarouge (longueurs d'ondes comprises entre 1 et 20 microns environ)

#### 1.1) Définitions relatives à l'émission

Un corps opaque ou partiellement opaque dont la température est supérieure au 0 degré Kelvin, émet spontanément de l'énergie sous forme de rayonnement.

L'énergie rayonnée est en relation directe avec l'agitation moléculaire du corps. Elle croît avec la température et cesse au zéro degré absolu.

Si S est la surface du corps, le flux d'énergie émis sous forme de rayonnement dans toutes les directions de l'espace est donné par la loi de STEFAN.

$$\phi = \sigma \epsilon S T^4$$

$\sigma$ : Constante de Stefan:  $4,92.10^{-8}$  Kcal/m<sup>2</sup>.h.°K<sup>4</sup>

$\epsilon$ : Facteur d'émission ou pouvoir émissif

$S$ : surface du corps (m<sup>2</sup>)

$T$ : température absolue du corps (°K)

La valeur de  $\epsilon$  est comprise entre 0 et 1. Elle dépend de la nature du corps, de sa température et de son état de surface s'il est solide.

En effet, pour les solides, seules les molécules de surfaces interviennent dans le rayonnement. Pour les liquides et surtout pour les gaz moins denses et où les molécules sont mobiles, une partie plus profonde du corps peut participer au rayonnement.

**Tableau 1:** valeurs de facteur d'émission de quelques matériaux

| matériaux      | Température en °K | $\epsilon$ |
|----------------|-------------------|------------|
| Acier18/8      | 230-1000          | 0,3-0,6    |
| Aluminium poli | 200-600           | 0,06-0,09  |
| Cuivre poli    | 100               | 0,05       |
| Cuivre oxydé   | 200-600           | 0,75       |
| Fer poli       | 400-1000          | 0,15-0,4   |
| Fer oxydé      | 100               | 0,75       |

Le facteur d'émission des métaux est faible, et il est d'autant plus que la surface du métal est mieux polis.

Les corps non métalliques ont des facteurs d'émission plus élevés que les métaux. Ce facteur diminue avec l'élévation de la température tandis que celui des métaux varie en sens inverse.

Pour les corps comme la suie, le noir de platine ou le noir de Bismuth ont des facteurs d'émission de l'ordre de 0,98 à 0,99

Ces corps sont très proche du corps noir parfait, pour le quel  $\varepsilon = 1$

Remarque :

En unité MKH il est commode d'écrire la loi de Stefan sous la forme :

$$\phi = 4,92 \varepsilon S (T/100)^4$$

### 1.2) Définitions relatives à l'absorption

Lorsque le rayonnement émis par une ou plusieurs surfaces rencontre un autre corps (récepteur), une partie de ce rayonnement est réfléchi, une partie est absorbée et enfin une partie est transmise si le récepteur n'est pas opaque aux radiations incidentes.

Si  $\phi$  est le flux d'énergie incident et si  $\phi_r$ ,  $\phi_a$ ,  $\phi_t$  sont respectivement la fraction du flux réfléchi, absorbée et transmise, on a

$$\phi = \phi_r + \phi_a + \phi_t$$

Soit  $1 = \phi_r/\phi + \phi_a/\phi + \phi_t/\phi$

Ou encore  $1 = r + a + t$

En posant  $r = \phi_r/\phi$  facteur de réflexion du corps  
 $a = \phi_a/\phi$  facteur d'absorption du corps  
 $t = \phi_t/\phi$  facteur de transmission du corps

Si  $t = 1$ , le corps est dit **transparent** ( $a = r = 0$ )

Si  $t = 0$  le corps est dit **opaque**

A l'exception des substances transparentes (quartz, verre, eau) les corps solides et liquides (sauf s'ils sont en couches très minces) ne transmettent pas de rayonnement. Ils sont **opaques**.

La fraction du rayonnement qui n'est pas réfléchi est donc complètement absorbée. Elle se **transforme en chaleur**.

Si de plus  $a = 0$ , le corps est dit **blanc**, il n'absorbe aucune énergie et le rayonnement est entièrement réfléchi, ( $r = 1$ )

Au contraire, si  $a = 1$  le corps est dit **noir**, il absorbe complètement l'énergie qu'il reçoit.

D'où l'intérêt du corps noir en transfert de chaleur. Il absorbe complètement l'énergie absorbée ( $a = 1$ ) et émet la totalité de l'énergie reçue ( $\varepsilon = 1$ ).

Remarque :

Un corps coloré est un corps qui absorbe sélectivement certaines radiations de la lumière visible. Son facteur d'absorption **varie avec la longueur d'onde** du rayonnement.

Ainsi le corps apparait :

Jaune, s'il absorbe préférentiellement le violet

Orange, s'il absorbe préférentiellement le bleu

Vert, s'il absorbe préférentiellement le rouge

**1.3) Facteur d'émission, facteur d'absorption**

Pour la plus part des corps le facteur d'absorption ( $a$ ) est compris entre 0 et 1, c'est à dire qu'une fraction seulement de l'énergie reçue est absorbée. Si cette fraction est la même pour toutes les radiations contenues dans le rayonnement, c'est-à-dire quelle que soit la longueur d'onde, le corps est dit « **gris** ». On montre alors dans ce cas :

$$a = \varepsilon$$

Le facteur d'absorption d'un **corps gris** est égal à son facteur d'émission. Ce facteur varie avec la température. Mais pour une température donnée, il est indépendant de la longueur d'onde des radiations émises ou reçues.

Remarques :

L'appellation corps gris n'implique pas que ce corps soit de couleur grise. Les briques de construction sont de couleur rouge mais sont un **corps gris** ( $a = \varepsilon$ ).

Un corps **diathermane** est un corps qui ne rayonne pas et qui n'absorbe pas (c'est un corps transparent)

**2°) Echange de chaleur entre deux surfaces grises séparées par un milieu transparent**

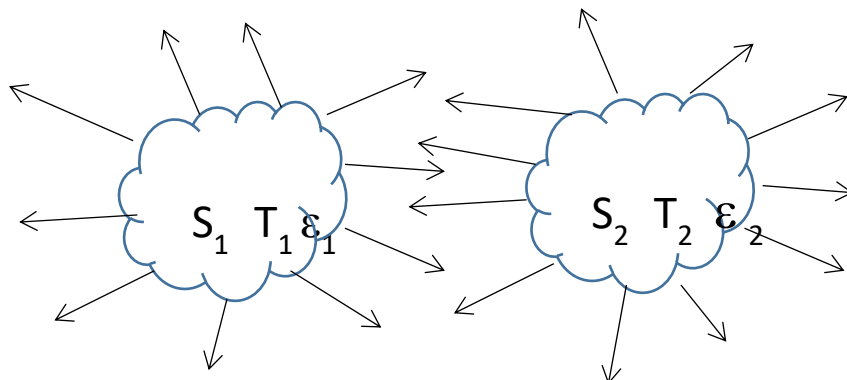
La loi de Stefan ne fournit que l'énergie émise par le rayonnement d'une surface, elle ne tient pas compte de l'énergie rayonnée par les corps alentour.

**Or, en pratique, il est important de connaître le flux de chaleur échangé entre le corps considéré et les autres corps qui l'entourent, c'est-à-dire la différence algébrique entre le flux de chaleur  $\phi_1$  émis et le flux de chaleur  $\phi_2$  reçu par le corps.**

Le calcul de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  est très complexe, dans le cas général. Nous nous limiterons à quelques exemples simples en supposant les corps gris.

### 2.1) Expression du flux de chaleur

Considérons deux corps gris séparés par un milieu non absorbant (exemple l'air)



Le corps 1 de facteur d'émission  $\epsilon_1$  et dont la surface d'aire  $S_1$  est à la température  $T_1$ , émet dans toutes les directions le flux de chaleur :

$$\phi_1 = \sigma \epsilon_1 S_1 T_1^4$$

Une partie  $\phi_1'$  de ce flux vient frapper le corps 2

$$\text{Avec } \phi_1' = F_{12} \phi_1 = F_{12} \sigma \epsilon_1 S_1 T_1^4$$

Le coefficient  $F_{12}$  est un facteur géométrique dépendant de la forme et de l'orientation des surfaces ainsi que de leur distance respective.

*Remarque : ce facteur est indépendant de la température*

Le corps 2 de facteur d'émission  $\epsilon_2$  (égal à son facteur d'absorption) absorbe le flux  $\phi_1''$

$$\phi_1'' = \epsilon_2 \cdot \phi_1' = \epsilon_2 \cdot F_{12} \sigma \epsilon_1 S_1 T_1^4$$

De même, en sens inverse, le corps 1 absorbe venant du corps 2 de facteur d'émission  $\epsilon_2$  et dont la surface d'aire  $S_2$  est la température  $T_2$ , le flux  $\phi_2''$

$$\phi_2'' = F_{21} \sigma \epsilon_2 \epsilon_1 S_2 T_2^4$$

Si  $T_1 = T_2$ , il n'y a pas de transfert thermique entre les deux corps, les deux flux  $\phi_1''$  et  $\phi_2''$  sont identiques, ce qui implique :

$$S_1 \cdot F_{12} = S_2 \cdot F_{21}$$

Le flux thermique résultant échangé entre les deux corps est donc (si  $T_1 > T_2$ )

$$\phi = \phi_1'' - \phi_2'' = F_{12} \sigma \epsilon_2 \epsilon_1 S_1 T_1^4 - F_{21} \sigma \epsilon_2 \epsilon_1 S_2 T_2^4$$



On remplace  $S_2 \cdot F_{21}$  par  $S_1 \cdot F_{12}$  puisque les facteurs géométriques sont indépendants des températures

$$\phi = F_{12} \sigma \varepsilon_2 \varepsilon_1 S_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

En réalité le problème est plus complexe, car il faut tenir compte de tiers corps (cas du rayonnement entre le plafond d'un four ayant un mur de réfractaire dans le fond).

De plus le facteur géométrique est difficile à calculer dans le cas général.

Pratiquement, lorsque les deux surfaces se « voient exclusivement », c'est-à-dire lorsque le rayonnement émis par l'une des surfaces ne peut atteindre que l'autre surface, on pose :

$$\phi = \sigma \varepsilon_{m1} S_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad \varepsilon_{m1} = F_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

En MKH 
$$\phi = 4,92 \varepsilon_{m1} S_1 ((T_1/100)^4 - (T_2/100)^4)$$

$\varepsilon_{m1}$  étant le facteur mutuel d'émission(ou d'absorption) des deux corps rapporté à la surface  $S_1$ . Il dépend de la forme et de la position relative des deux surfaces ainsi que de leurs facteurs d'émission ou d'absorption respectifs.

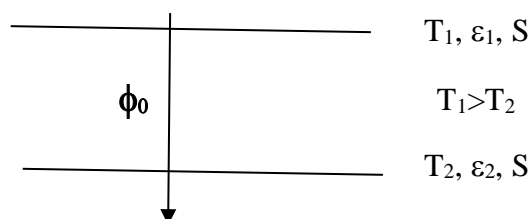
Les exemples les plus courants :

| Surface échangeant le rayonnement  | Facteur mutuel d'émission   |
|--|---|
| plans parallèles infinis (de grande étendue par rapport à leur distance) | $\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$                   |
| Corps n°1 intérieur au corps °2 et petit par rapport à celui-ci          | $\varepsilon_1$   |
| Cas 2 avec le corps 1 est une sphère ou cylindre concentrique            | $\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} (\frac{1}{\varepsilon_2} - 1)}$ |

## 2.2) Rôle d'un écran

Considérons deux plans gris parallèles et de grande dimension par rapport à leur distance. L'un est à la température  $T_1$  avec un facteur d'émission  $\varepsilon_1$  et l'autre à la température  $T_2$  avec un facteur d'émission  $\varepsilon_2$ .

On suppose  $T_1 > T_2$ , alors un flux de chaleur va se propagé du plan 1 vers le plan 2



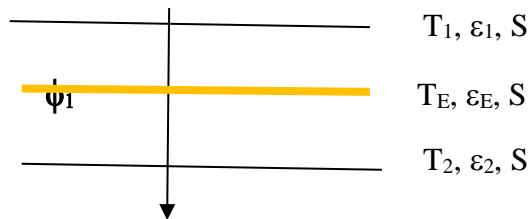
En l'absence de gaz absorbant, le flux thermique entre les deux plans est :

$$\phi_0 = \sigma \epsilon_{m1} S (T_1^4 - T_2^4)$$

avec  $\epsilon_{m1} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$

Donc 
$$\phi_0 = \frac{S\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

Intercalons entre les deux plans un écran opaque, mais conducteur (une plaque de tôle mince par exemple), dont le facteur d'émission est  $\epsilon_E$ .



A l'équilibre, c'est à dire en régime permanent, l'écran prend une température moyenne  $T_E$  intermédiaire entre  $T_1$  et  $T_2$  et on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \text{Flux thermique entre les deux plans} &= \text{Flux thermique entre le plan 1 et l'écran} &= \text{Flux thermique entre l'écran et le plan 2} \\ \phi_1 &= \phi_{1E} &= \phi_{E2} \end{aligned}$$

Avec 
$$\phi_1 = \phi_{1E} = \frac{S\sigma (T_1^4 - T_E^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_E} - 1}$$

$$\phi_1 = \phi_{E2} = \frac{S\sigma (T_E^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_E} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

Pour mieux pouvoir comparer  $\phi_1$  et  $\phi_0$ , choisissons le cas particulier où les deux plans et l'écran ont le même facteur d'émission. A noter que ce cas n'existe pas pratiquement, c'est juste pouvoir comparer.

On pose alors  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_E = \epsilon$

$$\phi_0 = \frac{S\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{2}{\epsilon} - 1}$$

Et

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{1E} = \frac{S\sigma (T_1^4 - T_E^4)}{\frac{2}{\epsilon} - 1} \\ \phi_1 &= \phi_{E2} = \frac{S\sigma (T_E^4 - T_2^4)}{\frac{2}{\epsilon} - 1} \end{aligned}$$

Additionnons membre à membre les deux dernière relations :

$$2\phi_1 = \frac{S\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{2}{\epsilon} - 1} \quad \text{ce terme représente le flux de chaleur sans l'écran} = \phi_0$$

$$2\phi_1 = \phi_0 \quad \text{donc} \quad \phi_1 = \phi_0 / 2$$

Ainsi, l'interposition d'un écran diminue le flux de chaleur par rayonnement. Dans le cas particulier étudié ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_E$ ), le flux de chaleur est divisé par 2.

De même, avec n écran, le flux serait divisé par n+1, soit :

$$\phi_n = \phi_0 / (n+1)$$

Ce raisonnement est encore valable pour des surfaces de formes quelconques et en particulier pour des surfaces sphériques ou cylindriques.

Application : interposition d'un écran devant une source de chaleur pour diminuer les pertes thermiques par rayonnement, sur un appareil ou dans salle.

### 3°) Echange thermique entre un gaz et une enceinte isothermes :

Pour un gaz absorbant  $a \neq \varepsilon$  (CO<sub>2</sub> ou H<sub>2</sub>O par exemple)

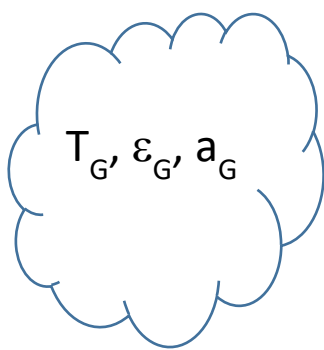
A une température donnée, ces facteurs (a et  $\varepsilon$ ) dépendent du produit p.L.

p : étant la pression du gaz absorbant(ou sa pression partielle s'il est mélangé avec un ou plusieurs gaz diathermanes)

L : étant la longueur que doit traverser le rayonnement et dont la valeur dépend de la forme de l'enceinte contenant le gaz. Pour une sphère de diamètre D : L = 0,5 D, Pour un cylindre de diamètre D : L = 0,9 D)

Soit un gaz à la température T<sub>G</sub> enfermé dans une enceinte de surface S<sub>p</sub> à la température T<sub>p</sub>.

Le gaz absorbant a son facteur d'absorption différent de son facteur d'émission ( $a_G \neq \varepsilon_G$ ). Pour la paroi supposée gris, son facteur d'absorption égal à son facteur d'émission ( $a_p = \varepsilon_p$ )



Le gaz émet le rayonnement selon la loi de Stefan :

$$\phi_G = \sigma \varepsilon_G S_p T_G^4$$

Une fraction  $\phi_G'$  est absorbée par la paroi :

$$\phi_G' = \phi_G \cdot \varepsilon_p = \sigma \varepsilon_G S_p T_G^4 \cdot \varepsilon_p$$

De son côté la paroi émet le rayonnement :

$$\phi_p = \sigma \epsilon_p S_p T_p^4$$

N'étant pas transparent le gaz absorbe une partie du rayonnement  $\phi_p'$  émis par la paroi :

$$\phi_p' = \phi_p \cdot a_G = a_G \cdot \sigma \epsilon_p S_p T_p^4$$

Supposons que la température du gaz est supérieure à celle de la paroi (comme c'est souvent le cas)  $T_G > T_p$

Le flux de chaleur échangé entre le gaz et la paroi de l'enceinte est donc :

$$\phi = \sigma \epsilon_p S_p (\epsilon_G T_G^4 - a_G T_p^4)$$

$$\phi = 4,92 \epsilon_p S_p (\epsilon_G (T_G/100)^4 - a_G (T_p/100)^4)$$

C'est le cas du calcul d'échange thermique entre les fumées et la paroi de la cheminée. Ou encore transfert thermique entre la fumée et la paroi du foyer d'une chaudière.

Dans le cas où le gaz et la paroi ne sont pas isothermes, la formule précédente reste applicable en prenant les températures moyennes :

Pour la paroi moyenne arithmétique :  $T_p = (T_{\text{interne}} - T_{\text{externe}})/2$

Pour le gaz la moyenne logarithmique :

$$T_G = (T_{G \text{ supérieure}} - T_{G \text{ inférieure}}) / \ln (T_{G \text{ supérieure}} / T_{G \text{ inférieure}})$$

#### 4°) Coefficient de rayonnement

On peut exprimer le flux de chaleur échangé par rayonnement entre deux corps sous forme Newtonienne :

$$\phi = h_r S (T_1 - T_2) \quad T_1 \text{ et } T_2 \text{ en degré Kelvin}$$

$$\text{Ou} \quad \phi = h_r S (\theta_1 - \theta_2) \quad \theta_1 \text{ et } \theta_2 \text{ en degré Celsius}$$

$h_r$  : coefficient de rayonnement thermique ou coefficient de rayonnement

Si  $\epsilon_m$  est le facteur mutuel d'émission rapporté à la surface S, le flux thermique est d'après ce qu'on a vu précédemment :

$$\phi = \sigma \epsilon_m S (T_1^4 - T_2^4)$$

On développant le terme  $(T_1^4 - T_2^4)$ , cette relation s'écrit:

$$\phi = \sigma \epsilon_m (T_1^2 - T_2^2) \cdot (T_1 + T_2) S (T_1 - T_2)$$

Par identification de la loi de Newton, le coefficient de rayonnement est:

$$h_r = \sigma \epsilon_m (T_1^2 - T_2^2) \cdot (T_1 + T_2)$$

Ou encore: 
$$h_r = \sigma \varepsilon_m (T_1^4 - T_2^4) / (T_1 - T_2) \quad \text{Kcal/h.}^\circ\text{K.m}^2$$

### 5°) Influence des phénomènes de convection et de rayonnement

Considérons une paroi à la température  $\theta$  en contact avec un fluide

Chaud dont la température moyenne est  $\theta_m$ .

Fluide chaud à  $\theta_m$

Lorsque le transfert de chaleur entre le fluide et la paroi s'effectue

simultanément par convection et rayonnement, le flux de chaleur est :

$$\begin{array}{ccc} \phi & = & \phi_c & = & \phi_r \\ \text{Flux thermique} & & \text{Flux thermique} & & \text{Flux thermique} \\ \text{total} & & \text{par convection} & & \text{par rayonnement} \end{array}$$

$$\phi = h S (\theta_m - \theta) = h_c S (\theta_m - \theta) = h_r S (\theta_m - \theta)$$

ou encore: 
$$\phi = (h_c + h_r) S (\theta_m - \theta)$$

avec:

$S$  : surface d'échange

$h$  : coefficient de transmission fluide-solide

$h_c$  : coefficient de convection

$h_r$  : coefficient de rayonnement

si  $h_r < h_c$  le rayonnement est négligeable de la convection 
$$\phi = h_c S (\theta_m - \theta)$$

si  $h_r > h_c$  la convection est négligeable de le rayonnement 
$$\phi = h_r S (\theta_m - \theta)$$

si  $h_r$  est du même ordre que  $h_c$ , les deux phénomènes sont comparable et aucun des deux ne peut être négligé, dans ce ca : 
$$\phi = (h_c + h_r) S (\theta_m - \theta)$$

D'une façon générale, l'influence relative des différents modes de transfert thermique dépend de nombreux facteurs : température, facteurs d'émission, conditions d'écoulement et nature du fluide, nature de la paroi, etc.....on peut cependant énoncer les règles suivantes :

- A basse température (200-300°C), le rayonnement est négligeable devant la convection forcée. Mais il est du même ordre que la convection naturelle.
- Quand la température s'élève la part du rayonnement augmente, vers les hautes températures le rayonnement est prépondérant même vis avis de la convection forcée (exemple des fours ou foyer fonctionnant à des températures supérieures à 500°C).

Dans les échangeurs industriels, dans le cas que nous allons étudier, le rayonnement est généralement négligeable et seul intervient la convection forcée.

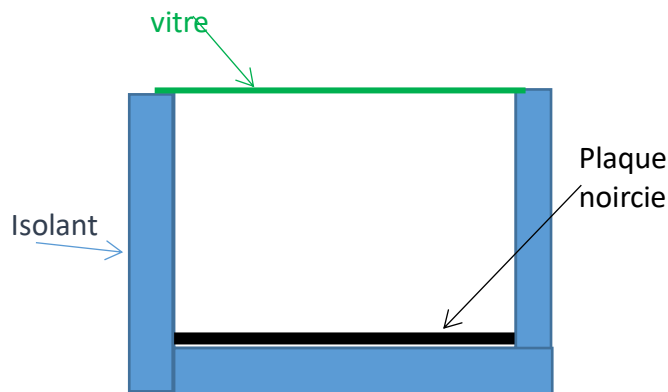
### Captage de l'énergie solaire

C'est le principe des chauffe-eau solaire

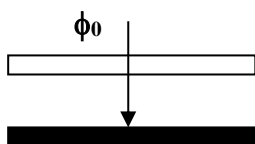
On prend comme hypothèse que le rayonnement solaire pour un ciel pur a une moyenne annuelle de 1 Kw. Pour simplifier les calculs on prend une surface de 1 m<sup>2</sup>.

$$\phi_0 = 1 \text{ Kw}$$

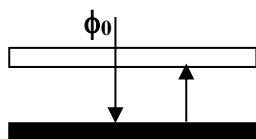
On place une plaque noircie au fond du bac. Ce dernier est bien entouré d'un isolant. Une vitre est placée en-dessus du bac pour donner l'effet de serre.



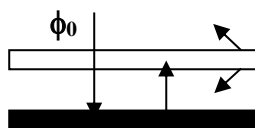
a°) Le flux de chaleur traverse intégralement la plaque de verre qui se trouve absorbé par la plaque noircie. Cette dernière se comporte comme un corps noir vis à vis de  $\phi_0$



b°) La plaque noire émet un rayonnement (puisqu'elle se chauffe) dans l'infrarouge lointain



c°) Le rayonnement émis par la plaque noircie qui est dans le domaine de l'infrarouge lointain est intégralement absorbé par la vitre qui réémet une partie vers l'extérieur et une partie vers l'intérieur.



A l'équilibre la plaque prend une température  $T_p$  et la vitre une température  $T_v$

*On néglige les pertes thermiques par conduction et convection*

Bilan thermique pour la plaque noircie  $\phi_0 + \sigma T_v^4 = \sigma T_p^4$  ( $S = 1\text{m}^2$  et  $\epsilon_v = \epsilon_p = 1$ )

Bilan thermique pour la vitre  $\sigma T_p^4 = 2\sigma T_v^4$

Après addition membre à membre on aura :  $2\phi_0 = \sigma T_p^4$

Dans ce cas la température de la plaque est :  $T_p = (2\phi_0 / \sigma)^{1/4}$

$$T_p = (2 \cdot 10^3 / 5,72 \cdot 10^{-8})^{1/4}$$

$$T_p = 433 \text{ °K} = 160 \text{ °C}$$

**NB :  $5,72 \cdot 10^{-8}$**  c'est la valeur de la constante *de Stefan* en  $\text{w/m}^2 \cdot \text{°K}^4$

*Pour éviter les pertes thermiques on utilise des matelas d'air entre la plaque noir et l'extérieur (double et triple vitrage). Cette énergie capturée par le corps noir peut être véhiculée est stockée ; c'est le principe des chauffe eau solaire.*

## 6°) TD SERIE V

**V.1°)** Un four cubique de côté 0.2 m est placé dans une grande salle. La paroi externe du four est maintenue à 340 °K, la température de la salle est 290 °K.

a°) Calculez le flux de chaleur échangé par rayonnement entre le four et la salle ( $\epsilon_p=0.7$ )

b°) On recouvre le four d'une plaque métallique 'grise' d'emissivité  $\epsilon_c = 0.25$ .

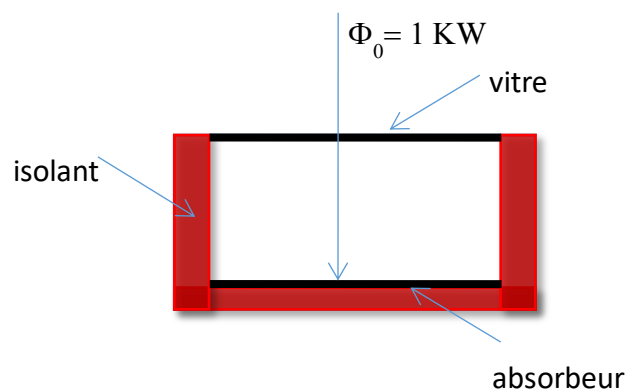
Ce four est chauffé grâce à des résistances électriques placées à l'intérieure et fonctionne en moyenne 10 heures par jour, 6 jours par semaine et 45 semaines par an et le Kwh électrique vaut 0.90 Dh. Quelle économie fait-on annuellement en ayant placé cet écran (plaque métallique) autour du four?

**V.2°)** Une vitre de surface de 1m<sup>2</sup> et d'épaisseur 4 mm sépare deux milieux où la température ambiante d'un côté est 20 °C, de l'autre coté 5 °C.

Le coefficient d'échange superficiel de part et d'autre est  $h = 12 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$ , tandis que la conductivité thermique du verre est  $\lambda = 1,2 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$ .

a°) Calculez le flux thermique transmis ainsi que les températures de surface du verre.

Le verre est complètement transparent aux radiations solaires directes dans la bande spectrale comprise entre 0,3  $\mu\text{m}$  et 2,5  $\mu\text{m}$ , on admet que le coefficient d'absorption  $a$  est nul, que le coefficient de réflexion  $r$  est nul et que le coefficient de transmission  $t = 1$ .



b°) Au-delà de 2,5  $\mu\text{m}$ , jusque vers 30  $\mu\text{m}$  le verre est au contraire parfaitement absorbant et se comporte comme un corps noir:  $a = 1$ ;  $r = t = 0$ .

Sous l'action du flux solaire ( $f_0 = 1 \text{ KW}$ ) et après équilibre thermique déterminez la température de l'absorbeur ainsi que la température de la vitre

$$s = 4,92 \cdot 10^{-8} \text{ Kcal} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{K}^{-4}.$$



**V.3°)** Un four cubique (dont les parois internes sont constituées d'un corps noir) de côté 0.5 m contient un gaz à 1200°C. La paroi interne du four est maintenue à 523 °C.

Établissez et calculez le flux de chaleur échangé par rayonnement entre la paroi du four et le gaz.

Coefficient d'absorption du gaz  $a_g = 0,2$                       Coefficient d'émission du gaz  $e_g = 0,062$

**V.4°)** Un four cubique (dont les parois internes sont constituées d'un corps noir) de côté 0,5 m contient un gaz à 1200 °C. la paroi interne du four est maintenue à 523 °C.

**a°)** Calculez le flux de chaleur échangé par rayonnement entre le gaz et la paroi du four.

Le four est placé dans une grande salle. La paroi externe du four est maintenue à 340 °K, la température de la salle est de 290°K.

**b°)** Calculez le flux de chaleur échangé par rayonnement entre la salle et le four.

**c°)** On recouvre le four d'une plaque métallique 'grise'. Calculez le nouveau flux de chaleur échangé par rayonnement entre la salle et le four ainsi que la température de la plaque métallique.

Coefficient d'absorption du gaz = 0,2                      Coefficient d'émission du gaz = 0,062

Coefficient d'émission de la paroi externe du four = 0,7

Coefficient d'émission de la plaque métallique = 0,25

**V.1°)**

**a°)**  $\Phi = \epsilon_{m1} \cdot S \cdot \sigma (T_p^4 - T_s^4)$      $\epsilon_{m1} = \epsilon_p$  (cas n°2)

$\Phi = 0,7 \cdot 6(0,2)^2 \cdot 4,92 \cdot [(3,4)^4 - (2,9)^4] = 51,99 \text{ Kcal/h}$

**b°)**

Il faut d'abord calculer le nouveau flux de chaleur  $\Phi'$

Sachant que :  $\Phi' = \Phi_{PE} = \Phi_{ES}$

$\Phi_{PE}$  : flux de chaleur échangé entre la paroi du four et l'écran

$\Phi_{ES}$  : flux de chaleur échangé entre l'écran et la salle

$\Phi' = \Phi_{PE} = \epsilon_{m1} \cdot S \cdot \sigma (T_p^4 - T_E^4)$

$\Phi' = \Phi_{ES} = \epsilon_{m1}' \cdot S \cdot \sigma (T_E^4 - T_s^4)$

$(T_p^4 - T_E^4) = \Phi' / \epsilon_{m1} \cdot S \cdot \sigma$

$(T_E^4 - T_s^4) = \Phi' / \epsilon_{m1}' \cdot S \cdot \sigma$

Après addition membre à membre, on obtient :

$$T_p^4 - T_s^4 = \Phi' / S \cdot \sigma [(1/\varepsilon_{m1}) + 1/\varepsilon_{m1}']$$

$$\Phi' = (T_p^4 - T_s^4) \cdot \frac{\sigma S \varepsilon_{m1} \varepsilon_{m1'}}{\varepsilon_{m1} + \varepsilon_{m1}'}$$

$$\varepsilon_{m1} : \text{cas n}^\circ 1 ; \varepsilon_{m1} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_p} + \frac{1}{\varepsilon_E} - 1} = 0,226 ; \text{ avec } \varepsilon_p = 0,7 \text{ et } \varepsilon_E = 0,25$$

$$\varepsilon_{m1}' ; \text{cas n}^\circ 2 ; \varepsilon_{m1}' = \varepsilon_E = 0,25$$

On obtient alors :  $\Phi' = 8,8 \text{ Kcal/h}$

La différence de flux de chaleur avant et après isolation est ;

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi' = 51,99 - 8,8 = 43,19 \text{ kcal/h}$$

En multipliant par le nombre d'heures de fonctionnement : 10 heures. 6 jours. 45 semaines = **2700 h**

On obtient un gain énergétique annuel de **43,19 kcal/h. 2700 h = 116613 Kcal**

Ce qui vaut **135,44 KWh**

Sachant que le KWh vaut **0,9Dh**

**Alors on réalise une économie annuelle de 121,9 Dh** (Ceci pour une faible surface de 0,24m<sup>2</sup>)

**V.2°)**

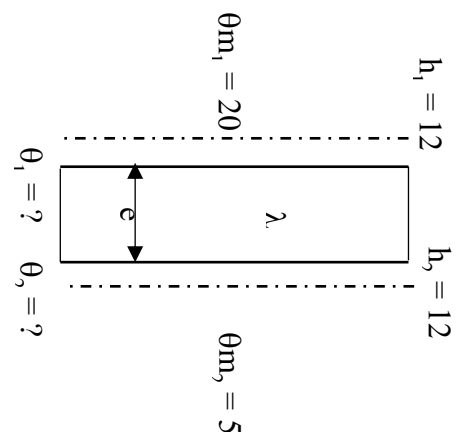
a°) Flux de chaleur et températures des interfaces

$$\Phi = \frac{(\theta_{m1} - \theta_{m2}) \cdot S}{\frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2}} = \frac{(20 - 5) \cdot 1}{\frac{1}{12} + \frac{4 \cdot 10^{-3}}{1,2} + \frac{1}{12}}$$

$$\rho = 88,24 \text{ Kcal/h}$$

$$\Phi = \frac{(20 - \theta_1)}{\frac{1}{12}} : \theta_1 = 12,65 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\rho = \frac{(20 - \theta_2)}{\frac{1}{12} + \frac{4 \cdot 10^{-3}}{1,2}} : \theta_2 = 12,36 \text{ }^\circ\text{C}$$



b°) Températures de l'absorbeur et de la vitre :

Voir détail sur le cours

$$T_p = \sqrt[4]{\frac{200}{\sigma}} = 433 \text{ °K}$$

$$T_v = \sqrt[4]{\frac{T_p^4}{2}} = 364 \text{ °K}$$

V.3°)

a°) voir cours

b°)

$$\Phi = \varepsilon_p \cdot S \cdot \sigma (\varepsilon_G T_G^4 - \alpha_G T_P^4)$$

$$\Phi = 1 \cdot 6(0,5)^2 \cdot 4,92 \cdot [0,062(14,73)^4 - 0,2(7,96)^4] = 15614,9 \text{ Kcal/h}$$

V.4°)

$$a°) \quad \Phi = \varepsilon_p \cdot S \cdot \sigma (\varepsilon_G T_G^4 - \alpha_G T_P^4)$$

$$\Phi = 1 \cdot 6(0,5)^2 \cdot 4,92 \cdot [0,062(14,73)^4 - 0,2(7,96)^4] = 15614,9 \text{ Kcal/h}$$

$$b°) \quad \Phi = \varepsilon_{m1} \cdot S \cdot \sigma (T_p^4 - T_s^4) \quad \varepsilon_{m1} = \varepsilon_p \text{ (cas n°2)}$$

$$\Phi = 0,7 \cdot 6(0,5)^2 \cdot 4,92 \cdot [(3,4)^4 - (2,9)^4] = 324,8 \text{ Kcal/h}$$

c°) Le nouveau flux de chaleur  $\Phi'$

$$\text{Sachant que : } \Phi' = \Phi_{PE} = \Phi_{ES}$$

$\Phi_{PE}$  : flux de chaleur échangé entre la paroi du four et l'écran

$\Phi_{ES}$  : flux de chaleur échangé entre l'écran et la salle

$$\Phi' = \Phi_{PE} = \varepsilon_{m1} \cdot S \cdot \sigma (T_p^4 - T_E^4)$$

$$\Phi' = \Phi_{ES} = \varepsilon_{m1}' \cdot S \cdot \sigma (T_E^4 - T_s^4)$$

$$(T_p^4 - T_E^4) = \Phi' / \varepsilon_{m1} \cdot S \cdot \sigma$$

$$(T_E^4 - T_s^4) = \Phi' / \varepsilon_{m1}' \cdot S \cdot \sigma$$

Après addition membre à membre, on obtient :

$$T_p^4 - T_s^4 = \Phi' / S \cdot \sigma [(1/\varepsilon_{m1}) + 1/\varepsilon_{m1}']$$

$$\Phi' = (T_p^4 - T_s^4) \cdot \frac{\sigma S \varepsilon_{m1} \varepsilon_{m1}'}{\varepsilon_{m1} + \varepsilon_{m1}'}$$

$$\varepsilon_{m1} : \text{cas n° 1} ; \varepsilon_{m1} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_P} + \frac{1}{\varepsilon_E} - 1} = 0,226 ; \text{ avec } \varepsilon_P = 0,7 \text{ et } \varepsilon_E = 0,25$$

$$\varepsilon_{m1}' ; \text{cas n° 2} ; \varepsilon_{m1}' = \varepsilon_E = 0,25$$

On obtient alors :  $\Phi' = 55,04 \text{ Kcal/h}$

$$\Phi' = \Phi_{PE} = \varepsilon_{m1} \cdot S \cdot \sigma (T_p^4 - T_E^4)$$

ou

$$\Phi' = \Phi_{ES} = \varepsilon_{m1}' \cdot S \cdot \sigma (T_E^4 - T_s^4)$$

Nous permet de calculer la température de la plaque métallique :  $T_E = 316,67 \text{ °K}$

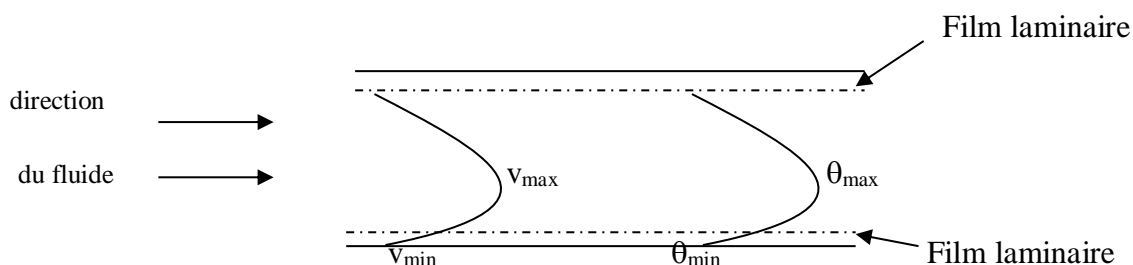
## CHAPITRE 6 : TRANSFERT THERMIQUE PAR CONVECTION

### 1°) Introduction

Les échanges thermiques par convection ont pour origine le mouvement d'un fluide. Ce mouvement peut être provoqué par une cause mécanique extérieure, il s'agit de la convection forcée. Ce mouvement peut également prendre naissance sous l'effet même des échanges thermiques qui font apparaître dans le fluide des différences de température et par, suite, des différences de densité, il s'agit de la convection libre ou naturelle.

Dans l'un ou l'autre cas, le régime hydrodynamique d'écoulement du fluide joue un rôle essentiel dans le mécanisme des échanges thermiques. C'est-à-dire un régime laminaire ou turbulent.

D'une façon générale, le calcul des échanges thermiques par convection suppose que dans un fluide la loi de répartition spatiale des températures est semblable à celle des vitesses.



Quel que soit le régime d'écoulement du fluide, il demeure une sous couche laminaire (couche limite dynamique) dont l'épaisseur est d'autant plus réduite que le nombre de Reynolds est grand.

L'épaisseur de cette couche varie naturellement en fonction de nombreux paramètres: nature du fluide, la température, degré d'agitation, rugosité de la paroi etc.

Le gradient thermique est particulièrement important au voisinage de la paroi, c'est-à-dire dans la sous couche limite. Ce gradient thermique élevé traduit la faible conductibilité de

contact du film qui adhère pratiquement à la paroi. Quel que soit le régime d'écoulement du fluide, on considère que la résistance thermique est entièrement située dans le film laminaire qui joue le rôle d'isolant (couche limite thermique).

Le but de ce chapitre est de déterminer un coefficient de convection ( $h_c$ ) de transfert de chaleur entre un fluide et paroi d'un échangeur de chaleur.

## 2°) Expression du flux de chaleur

On considère que cette résistance thermique  $R$  est équivalente à celle que le flux thermique rencontrerait en conduction à travers une paroi dont l'épaisseur serait celle du film laminaire et qui posséderait les mêmes caractéristiques thermiques que le fluide, soit :

$R = e/\lambda S$  avec  $e$  : épaisseur du film laminaire et  $\lambda$  : conductivité thermique du fluide

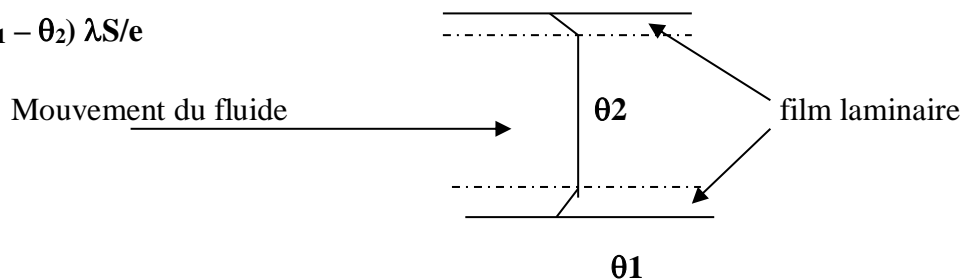
Le flux de chaleur est alors :  $\phi = (\theta_1 - \theta_i) \lambda S/e$

$\theta_1$ : température de la paroi

$\theta_i$ : température du fluide à la limite du film laminaire

Pour un régime bien établi, la température du fluide au-delà du film laminaire est une température moyenne  $\theta_2$  et le flux de chaleur vaut donc :

$$\phi = (\theta_1 - \theta_2) \lambda S/e$$



$\theta_2$  dépend du régime d'écoulement pour un fluide circulant dans une canalisation. Dans le cas d'un échange paroi-fluide on prendra la température  $\theta_2$  du fluide le plus loin de la paroi.

### 3°) Coefficient de convection, loi de Newton

Le coefficient de transfert superficiel ou coefficient de convection :  $h_c = \lambda S/e$  ; Kcal/hm<sup>2</sup>°C

Dans la pratique cette formule présente une énorme difficulté parce qu'on ne connaît l'épaisseur du film laminaire.

Le flux de chaleur est donné par la loi de Newton quel que soit la convection (naturelle ou forcée) quel que soit le régime d'écoulement (laminaire ou turbulent) :

$$\phi = h_c S \Delta\theta$$

Le problème majeur avant le calcul du flux de chaleur consiste à déterminer  $h_c$  qui dépend d'un nombre important de paramètres : caractéristiques du fluide, de l'écoulement, de la température, de la forme de la surface d'échange etc.

Pour cela on utilisera l'analyse dimensionnelle qui nous donnera des *variables réduites sans dimensions*. Ces variables font apparaître entre elles des corrélations théoriques qui détermineront par la suite la forme *mathématique empirique* des coefficients de transfert selon différent cas :

- Transfert de chaleur sans changement d'état (convection naturelle et convection forcée)
- Transfert de chaleur avec changement d'état (condensation, évaporation)

### 4°) Transfert de chaleur sans changement d'état

#### 4.1°) Convection forcée : analyse dimensionnelle

Le but de cette partie est de faire apparaître les relations qui seront à la base des calculs des échangeurs de chaleurs. Le plus important du point de vue pratique est de déterminer le coefficient de convection  $h$  relatif au transfert de chaleur fluide-paroi (circulation d'un fluide dans une canalisation)

##### 4.1.1) Application de l'analyse dimensionnelle

Le flux de chaleur  $\phi$  par unité de surface dépend de :

- Des caractéristiques du fluide : conductivité thermique  $\lambda$ , chaleur massique  $cp$ , masse volumique  $\rho$  et viscosité dynamique  $\eta$
- Des caractéristiques de l'écoulement : vitesse moyenne  $v$
- De la géométrie de surface : diamètre  $D$
- De l'écart de température paroi-fluide  $\Delta\theta$

Soit  $\phi = f(\lambda, cp, \rho, \eta, v, D, \Delta\theta)$

Ou encore  $f(\phi, \lambda, cp, \rho, \eta, v, D, \Delta\theta) = 0$  : équation à 8 paramètres

Avec 5 dimensions fondamentales (M, L, T,  $\theta$  et Q), cette relation entre 8 grandeurs physiques sera réduite à une relation entre  $8-5 = 3$  **rappports sans dimensions**. C'est-à-dire 3 **variables réduites sans dimensions** au lieu de 8 paramètres.

Equation dimension de chacune des grandeurs physiques :

$$\begin{array}{ll} \lambda : QT^{-1}L^{-1}\theta^{-1} & v : LT^{-1} \\ cp : Q M^{-1}\theta^{-1} & D : L \\ \rho : ML^{-3} & \Delta\theta : \theta \\ \eta : MT^{-1}L^{-1} & \phi : QT^{-1}L^{-2} \text{ (flux de chaleur par unité de surface)} \end{array}$$

**NB**: la viscosité dynamique est exprimée en Kg/m.h. Par la suite on travaillera en poiseuille(Pl) : Kg/m.s

Il faut choisir 5 grandeurs de base, comme exemple :  $\lambda, \rho, v, D, \Delta\theta$ , (toutes les dimensions fondamentales figurent au moins une fois sur les 5 paramètres)

Il reste :  $\phi, cp, \eta$

On écrit alors 3 rapports sans dimensions (**3 variables réduites sans dimensions**)

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \phi / \Delta\theta^{a_1} \lambda^{b_1} \rho^{c_1} D^{d_1} v^{e_1} & \Pi_2 &= cp / \Delta\theta^{a_2} \lambda^{b_2} \rho^{c_2} D^{d_2} v^{e_2} \\ \Pi_3 &= \eta / \Delta\theta^{a_3} \lambda^{b_3} \rho^{c_3} D^{d_3} v^{e_3} \end{aligned}$$

On traite le premier sans dimension :

$$\Pi_1 = \phi / \Delta\theta^{a_1} \lambda^{b_1} \rho^{c_1} D^{d_1} v^{e_1} \quad ; \quad \Pi_1 = QT^{-1}L^{-2} / \theta^{a_1}(QT^{-1}L^{-1}\theta^{-1})^{b_1}(ML^{-3})^{c_1} L^{d_1} (LT^{-1})^{e_1}$$

Pour chaque dimension fondamentale, on identifie les exposants entre le numérateur et le dénominateur relatif à une même dimension :

$$(Q); 1 = b_1$$

$$(L); -2 = -b_1 - 3c_1 + e_1 + d_1$$

$$(T); -1 = -b_1 - e_1$$

$$(M); 0 = c_1$$

$$(\theta); 0 = a_1 - b_1$$

5équations à 5 inconnues, ce qui nous donne :

$$a_1 = 1 ; \quad b_1 = 1 ; \quad c_1 = 0 \quad ; \quad d_1 = -1 \quad \text{et } e_1 = 0$$

On reprend l'équation de base en remplaçant les indices trouvés:

$$\Pi_1 = \phi / \Delta\theta^1 \lambda^1 \rho^0 D^{-1} v^0 \quad \text{ce qui nous donne} \quad \Pi_1 = \phi / \Delta\theta^1 \lambda^1 D^{-1}$$

Le flux de chaleur par unité de surface vaut :  $\phi = h\Delta\theta$



On remplace dans l'équation précédente:  $\Pi_1 = \frac{h\Delta\theta}{\lambda^1 D^1} = \frac{hD}{\lambda}$

$\Pi_1 = Nu$ : c'est le nombre de **Nusselt**, c'est l'une des 3 variables réduites sans dimensions.

**Ce rapport sans dimension et d'autant plus élevé que le transfert de chaleur par convection est important.**

De la même manière on procède pour les deux autres variables réduites sans dimensions :

$\Pi_2 = \frac{cp}{\Delta\theta} \lambda^{b2} \rho^{c2} D^{d2} v^{e2} = cp \rho D v / \lambda = Pe$  : c'est le nombre de Peclet

$\Pi_3 = \frac{\eta}{\Delta\theta} \lambda^{a3} \lambda^{b3} \rho^{c3} D^{d3} v^{e3} = \eta / \rho D v = 1 / Re$  : c'est l'inverse du nombre de Reynolds qui caractérise le **régime d'écoulement** dans la canalisation.

Donc au lieu de travaillé avec 8 grandeurs physiques :  $(\phi, \lambda, cp, \rho, \eta, v, D, \Delta\theta) = 0$ , l'analyse dimensionnelle nous permet d'avoir des relations avec uniquement **3** variables réduites sans dimensions (**3** nombres sans dimensions) :  $\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3)$

C'est-à-dire  $Nu = f(Pe, Re)$  ou encore  $\frac{hD}{\lambda} = f(cp \rho D v / \lambda, \rho D v / \eta)$

On voit bien le coefficient de convection (**h**) sur cette dernière relation.

Dans le Peclet  $Pe = cp \rho D v / \lambda$  on peut faire apparaitre le  $Re = \rho D v / \eta$

**Donc**  $Pe = Re \cdot cp \eta / \lambda$

$cp \eta / \lambda$  : est un nouveau nombre sans dimension, c'est le nombre de Prandelt :  $Pr$

$$Pr = cp \eta / \lambda$$

L'intérêt de ce nombre est qu'il ne contient que les grandeurs physiques liées au fluide. Le Prandelt est calculable pour un fluide donné indépendamment des conditions expérimentales (à l'exception de la température) et caractérise l'influence de la nature du fluide sur le transfert de chaleur par convection. D'où on préfère :  $Nu = (Re, Pr)$  :

$$\frac{hD}{\lambda} = f(\rho D v / \eta, cp \eta / \lambda)$$

***On voit bien dans cette relation que le transfert de chaleur par convection dépend du régime d'écoulement et de la nature du fluide.***

Si on choisit d'autres grandeurs de base que celles qu'on a choisi on aura d'autres nombres, tel que le nombre de Margoulis ou Stanton etc..... Dans notre cas on se limite aux nombres trouvés et qui sont les plus usuels.

### **Conclusion**

Donc l'analyse dimensionnelle indique entre quels rapports il faut chercher une relation et c'est la recherche expérimentale (considérablement simplifiée puis que les grandeurs physiques réduites sont limités) qui donnera la forme des relations mathématiques empiriques qui relie ces nombres sans dimensions.

#### 4.1.2) Expression du coefficient de convection

Il faut rappeler que les formules suivantes sont établies pour

- *Transfert de chaleur sans changement d'état*
- *Convection forcée*
- *Le fluide circule à l'intérieur de la canalisation*
- *le fluide s'échauffe*

**a°) régime turbulent ( $Re > 10^4$ )**

$$\text{Formule de Colburn : } Nu = A Re^{0,8} Pr^{0,4}$$

Avec  $A = 0,018$  pour les gaz ;  $A = 0,020$  pour l'eau ;  $A = 0,023$  pour les hydrocarbures

**b°) régime laminaire ( $Re < 2100$ )**

$$Nu = 1,64 (Re \cdot Pr \cdot (D/L))^{1/3} \quad \text{où } L \text{ est la longueur de la canalisation de diamètre } D$$

Solution expérimentale dans le cas où on ne peut pas négliger la variation de la viscosité en fonction de la température :

$$Nu = 1,86 (\eta/\eta_p)^{0,14} (Re \cdot Pr \cdot (D/L))^{1/3} \quad \eta: \text{ viscosité à la température de la masse}$$

$\eta_p$  : viscosité à la température de la paroi

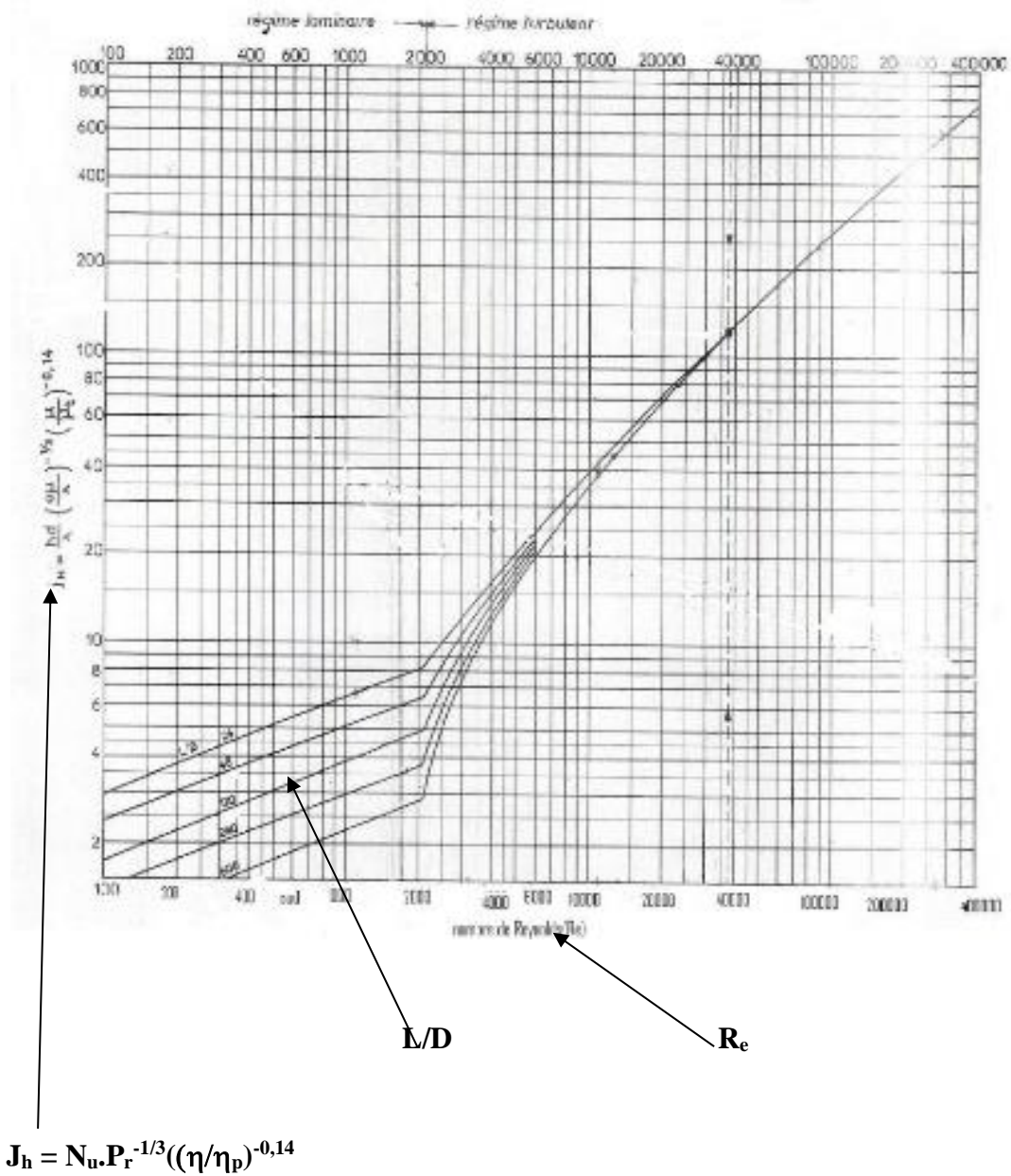
*NB : le régime laminaire n'est pas souhaitable pour le transfert thermique dans les échangeurs de chaleur. Pour cela on augmente la turbulence grâce à des étranglements et chicanes. Avec ces solutions on peut doubler le transfert thermique par rapport à ce qu'il serait sans ces artifices.*

**c°) régime intermédiaire**

Il existe des abaques qui donnent la grandeur sans dimension

$$J_h = Nu \cdot Pr^{-1/3} (\eta/\eta_p)^{-0,14}$$

En fonction du  $Re$ , ces courbes sont paramétrées par  $L/D$ . la connaissance de  $J_h$  permet alors de sortir  $Nu$ .



#### 4.1.3) Modifications à apporter aux formules de $h_c$ pour d'autres conditions

**a°)** mêmes conditions que 4.1.2 mais le fluide se refroidit au lieu de se chauffer, c'est-à-dire :

- Transfert de chaleur sans changement d'état
- Convection forcée
- Le fluide circule à l'intérieur de la canalisation
- le fluide se **refroidit**

on garde les mêmes formules, seule la formule de Colburn qui change :  $N_u = A Re^{0,8} Pr^{0,3}$

$Pr^{0,3}$  au lieu de  $Pr^{0,4}$

**b°)** fluide circulant à l'extérieur des tubes et parallèlement à ceux-ci

On utilise les mêmes formules que précédemment mais on remplace dans le  $Nu$  et le  $Re$ , le diamètre par un diamètre équivalent :  $D_e$

Exemple le fluide circule entre des espaces annulaires

Concentriques (tubes diamètres respectifs  $D_1/D_2$  et  $D_3/D_4$ )

$D_e$  : diamètre équivalent

= 4x la section de passage/ le diamètre affecté par le transfert de chaleur

$$D_e = \frac{4 \pi (D_3^2 - D_2^2)}{4 \pi D_x} = (D_3^2 - D_2^2) / D_x$$

$x = 2$  si le transfert s'effectue entre le fluide circulant dans le tube intérieur et le fluide circulant dans l'espace annulaire

$x = 3$  si le transfert s'effectue entre le fluide circulant dans l'espace annulaire et le fluide circulant à l'extérieur du tube extérieur.

$$D_e = (D_3^2 - D_2^2) / D_x$$

Dans la suite on aura besoin de calculer la vitesse à partir du débit, lorsque le fluide circule dans l'espace annulaire :

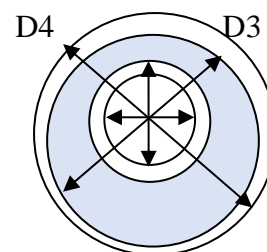
$q_v = v.S$  avec  $q_v$ : débit volumique ( $m^3/s$ ) ;  $v$  : vitesse ( $m/s$ ) ;  $S$  : section de passage ( $m^2$ )

$S = \pi D_1^2 / 4$  si le fluide circule à l'intérieur du tube intérieur

$S = \pi.(D_3^2 - D_2^2) / 4$  si le fluide circule dans l'espace annulaire

**NB** : Débit massique =  $q_m$  :  $Kg/h$  ;  $\rho$  :  $Kg/m^3$  ; débit volumique  $q_v = q_m / \rho = m^3/h$

**Remarque** : D'autres formules empiriques du coefficient de convection sont disponibles. On se limitera à celles vues plus haut.



#### 4.2\*) Convection naturelle

Dans le cas d'un fluide en contact d'une paroi plane verticale, l'analyse dimensionnelle fait apparaître un nouveau nombre sans dimension caractéristique de la convection libre (naturelle), dont la signification permet une analogie convection libre-convection forcée.

##### 4.2.1) analyse dimensionnelle

Soit  $\beta$  : coefficient de dilatation volumique du fluide

$\Delta\theta$  : la différence de température qui provoque une variation  $\Delta\rho$

$\Delta\rho$  : variation de la masse volumique

$$\beta = \frac{1 \cdot \Delta\rho}{\rho \cdot \Delta\theta}$$

Initialement le fluide au repos en contact d'une paroi plane :

$\rho_0$  à  $\theta_0$  avec  $\rho_0 = m_0$  pour l'unité de volume ( $v = 1$ )

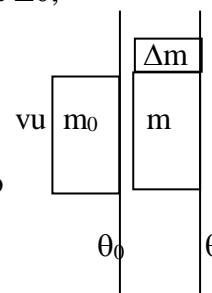
Si l'on porte la paroi à une température  $\theta$ , le fluide qui subit un échauffement  $\Delta\theta$ ,

va se dilater et sa masse va varier de  $\Delta m = v \cdot (\rho_0 - \rho)$

donc  $\Delta m = \Delta\rho$  puisque  $v = 1$  ;  $\Delta m = m_0 - m$

Le fluide sera soumis à force ascensionnelle  $\Delta m \cdot \vec{g} = \Delta\rho \cdot \vec{g}$  puisque  $\Delta m = \Delta\rho$

$\Delta\rho \cdot \vec{g} = m\gamma$  pour le volume unité  $\rho = m$ , donc :



$$\Delta\rho \cdot g = \rho\gamma \quad : \gamma = (\Delta\rho \cdot g) / \rho$$

En combinant avec la première équation ( $\beta = \frac{1 \cdot \Delta\rho}{\rho \cdot \Delta\theta}$ ) on obtiendra :

$$\gamma = \beta \Delta\theta g$$

C'est l'accélération produite par l'expansion thermique due à la variation de température  $\Delta\theta$ .

et  $\beta g$  représente l'accélération due à la variation de température de 1 °C.

Cet écoulement le long de la paroi dans la couche limite thermique va donner naissance aux courants de convection.

Dans ce cas (convection libre le long d'une paroi plane verticale) le coefficient de convection dépend de :

Caractéristique du fluide :  $\lambda, \rho, \eta, c_p, \beta g$

Géométrie de la paroi : L

Ecart de température :  $\Delta\theta$

donc  $0 = f(\lambda, \rho, \eta, cp, \beta g, L, \Delta\theta, \phi)$

Avec 8 grandeurs physiques et 5 dimensions fondamentales, on aura 3 variables réduites sans dimension. (Ou 3 nombres sans dimensions)

On prend comme grandeurs de base :  $\lambda, \rho, \eta, L, \Delta\theta$

Et comme rapport :  $\phi, cp, \beta g$

Donc au lieu de travaillé avec 8 grandeurs physiques:  $0 = f(\lambda, \rho, \eta, cp, \beta g, L, \Delta\theta, \phi)$ , l'analyse dimensionnelle nous permet d'avoir des relations avec uniquement 3 variables réduites sans dimensions (3 nombres sans dimensions) :  $\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3)$

$$\Pi_1 = \phi L / \lambda \Delta\theta = h \cdot L / \lambda = N_u$$

$$\Pi_2 = cp \cdot \eta / \lambda = P_r$$

Et  $\Pi_3 = \beta g \Delta\theta \rho^2 L^3 / \eta^2 = G_r = \text{nombre de Grashof}$

Donc l'analyse dimensionnelle indique une corrélation de la forme :

$$Nu = f(G_r, P_r)$$

Le nombre de Grashof caractérise le mouvement du fluide provoqué par la variation de la température. Alors qu'on convection forcée, le régime imposé au fluide masque les courants de convection et le nombre de Grashof devient négligeable :  $Nu = f(R_e, P_r)$ . Au contraire en convection naturelle (fluide au repos) le  $R_e$  disparaît et c'est le Grashof qui caractérise l'écoulement :  $Nu = f(G_r, P_r)$ .

#### 4.2.2) Expression du coefficient de convection

- Régime laminaire :  $10^4 < G_r \cdot P_r < 10^9$

$$Nu = 0,57(G_r \cdot P_r)^{1/4}$$

- Régime turbulent:  $G_r \cdot P_r > 10^9$

$$Nu = 0,12(G_r \cdot P_r)^{1/3} \quad \text{pour les gaz}$$

$$Nu = 0,17(G_r \cdot P_r)^{1/3} \quad \text{pour les liquides}$$

Les caractéristiques du fluide doivent être déterminées à la température du film (moyenne arithmétique entre la température de la paroi et celle du fluide)

Cas des fluides métallique ou le  $Pr$  est faible on a :  $Nu = 0,75(G_r \cdot P_r^2)^{1/4}$

### 4.2.3) Relations empiriques

**a°)** plaque verticale : voir, 4.2.2

**b°)** fluide autour de tubes horizontaux :  $Nu = 0,47(G_r \cdot P_r)^{1/4}$

$Nu = hD/\lambda$ ;  $D =$  diamètre extérieur

$G_r = \beta g \Delta \theta \rho^2 D^3 / \eta^2$  : sur ces deux nombres on a remplacé la hauteur  $L$  par diamètre  $D$

**c°)** fluide circulant dans un tube horizontal :  $Nu = 0,64(G_r \cdot P_r)^{1/4}$

(h sera rapporté à la surface interne du tube, donc le diamètre intérieur)

**d°)** chauffage de l'air à la température ambiante

- plaque verticale de hauteur  $> 1m$  :  $h = 1,98(\Delta\theta)^{1/4}$
- plaque verticale de hauteur  $< 1m$  :  $h = 1,81(\Delta\theta/H)^{1/4}$  avec  $H =$  hauteur de plaque
- plaque horizontale regardant vers le bas :  $h = 1,28(\Delta\theta)^{1/4}$
- plaque horizontale regardant vers le haut :  $h = 2,44(\Delta\theta)^{1/4}$
- tube horizontal de diamètre extérieur  $D_{ext}$  :  $h = 1,14(\Delta\theta/D_{ext})^{1/4}$

## 5°) TD SERIE 6

**VI.1°)** Dans un cylindre de 4 cm de diamètre intérieur s'échauffe de l'air à un débit constant de  $3,33 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$ . Calculez le coefficient de convection sachant que :

$$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3 ; \eta = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ Pl}, \lambda = 6,2 \cdot 10^{-6} \text{ Kcal/m.s.}^\circ\text{C}, C_p = 0,24 \text{ Kcal/kg.}^\circ\text{C}$$

**VI.2°)** Dans un cylindre de 5 cm de diamètre et de 2,2 m de longueur circule de l'air à la température de  $200^\circ\text{C}$ . Le cylindre, maintenu à la température de  $25^\circ\text{C}$ , reçoit un flux de chaleur de 6 KW.

a°) Déterminez le coefficient de convection.

b°) Calculez le nombre de Nusselt et le nombre Reynolds si le nombre de Prandtl vaut 0,72 (régime turbulent)

c°) Calculez le débit d'écoulement de l'air.

$$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3 ; \eta = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ Pl}, \lambda = 6,2 \cdot 10^{-6} \text{ Kcal/m.s.}^\circ\text{C}$$

**VI.3°)** De l'eau à  $60^\circ\text{C}$  circule dans un tube (diamètre intérieur = 30 mm) en verre à l'air libre.

a°) Calculez le coefficient de convection  $h$  sachant que le débit étant maintenu constant à  $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ .

b°) L'eau, dans les mêmes conditions de température et de débit circule maintenant dans l'espace annulaire compris entre deux tubes de diamètres respectifs 20/27 et 50/60. Déterminez le coefficient  $h'$  au niveau de la paroi interne du tube externe.

c°) Calculez le coefficient de convection  $h$  relatif à la circulation dans un tube de diamètre tel que la vitesse de l'eau soit la même que le cas (b°).

$$\rho_{60} = 983 \text{ kg/m}^3 ; \eta_{60} = 0,47 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}, \lambda_{60} = 0,564 \text{ Kcal/m.h.}^\circ\text{C}, C_p = 1 \text{ Kcal/kg.}^\circ\text{C}$$

**VI.4°)** De l'air à  $60^\circ\text{C}$  circule, à un débit constant de  $0,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ , dans un tube de 4,8 m de long et de 40 mm de diamètre.

a) Calculez le coefficient de convection.

L'air dans les mêmes conditions de débit et de température circule dans l'espace annulaire compris entre deux tubes de diamètres respectifs 30/37 et 55/60.

a) Déterminez le coefficient de convection au niveau de la paroi externe du tube interne.

$$\text{Données: } \rho = 983 \text{ Kg/m}^3 ; C_p = 1 \text{ Kcal/ Kg.}^\circ\text{C} ; \lambda = 0,540 \text{ en MK} ; \eta = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$$



**VI.5°)** Un échangeur de chaleur est constitué de deux tubes concentriques. Le tube intérieur à des diamètres de 50/60. Le tube extérieur à un diamètre intérieur de 80 mm. Dans le tube intérieur circule du toluène avec un débit massique 2,5 Kg/s. dans l'espace annulaire circule de l'eau avec un débit de 2 Kg/s.

Les caractéristiques des fluides sont les suivantes :

| Caractéristiques | Cp (cal/g.°C) | $\eta$ (Pl)          | $\rho$ (g/cm <sup>3</sup> ) | $\lambda$ (Kcal/h.m.°C) |
|------------------|---------------|----------------------|-----------------------------|-------------------------|
| Toluène          | 0,4           | $0,6 \cdot 10^{-3}$  | 0,86                        | 0,12                    |
| Eau              | 1             | $0,36 \cdot 10^{-3}$ | 1                           | 0,565                   |

Calculez les coefficients de convection toluène-paroi interne du tube intérieur et eau-paroi externe du tube intérieur.

La température du toluène est supérieure à celle de l'eau.

**VI.6°)** Une tuyauterie horizontale en acier doux de 2 pouces (52,5/62) et de conductivité thermique  $\lambda_t = 38,5$  Kcal/h.m.°C, véhicule 100 Kg/h de vapeur d'eau surchauffée à 150 °C.

Le tube est recouvert d'un isolant de 3 cm d'épaisseur, de conductivité thermique  $\lambda_i = 0,05$  Kcal/h.m.°C et de coefficient d'émission  $\varepsilon_{iso} = 0,25$ . L'air ambiant est à une température de 15 °C.

**a°)** Calculez le flux de chaleur échangé entre la vapeur et l'air pour 1 m de tube isolé.

**b°)** On crée un courant d'air perpendiculaire à la tuyauterie. Calculez le flux de chaleur échangé entre la vapeur et l'air pour 1 m de tube isolé lorsque la vitesse de l'air est 2,5 m/s.

Données:

|              | cp (Kcal/Kg.°C) | $\eta$ (Kg/m.s)      | $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> ) | $\lambda$ (Kcal/h.m.°C) |
|--------------|-----------------|----------------------|-----------------------------|-------------------------|
| Vapeur d'eau | 0,48            | $1,45 \cdot 10^{-5}$ | 1,036                       | 0,024                   |
| Air          | 0,25            | $1,85 \cdot 10^{-5}$ | 1,165                       | 0,023                   |

**VI.7\*)** Un jeune diplômé de l'EST est engagé dans une société où on lui demande de participer au projet d'isolation d'une canalisation horizontale dans un grand hall.

Ce projet consiste à transporter un hydrocarbure à 100 °C d'une unité vers une autre voisine, distante de 20 m moyennant une canalisation galvanisée 180/220 de conductivité thermique 15 en MKH et de coefficient d'émission  $\varepsilon_p = 0,65$ .

Le jeune diplômé propose le calorifugeage par un isolant de 20 mm d'épaisseur, de conductivité thermique 0,06 en MKH, de coefficient d'émission  $\varepsilon_p = 0,25$  et un prix de 200 DHs par mètre préformé.

La proposition du jeune diplômé est-elle bénéfique pour la société sachant que la marche annuelle est de 2300 heures et le prix du KWh vaut 0,95 DHs ?

La température ambiante moyenne est égale à 25 °C

Caractéristiques de l'hydrocarbure:

$$\begin{aligned} \eta &= 1,45 \cdot 10^{-5} \text{ Kg/m.s} & C_p &= 0,46 \text{ Kcal/Kg.}^\circ\text{C} \\ \rho &= 800 \text{ Kg/m}^3 & \lambda &= 0,65 \text{ Kcal/h.m.}^\circ\text{C} & Q &= 900 \text{ Kg/h} \end{aligned}$$

**VI.1\*)**

Débit constant donc convection forcée (sans changement d'état)

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta} \quad q_v = v \pi D^2 / 4 \quad v = 4 q_v / D^2 \pi$$

$$\text{donc } Re = \frac{\rho \cdot 4 q_v}{\pi D \eta} = \frac{983.4.3.33.10^{-2}}{4.10^{-2} \cdot \pi \cdot 1.9.10^{-5}} = 66950 > 10^4$$

Régime turbulent

Fluide à l'intérieur du tube

Le fluide s'échauffe

$$\text{Donc } Nu = 0,018 Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4} \text{ avec } Pr = c_p \eta / \lambda = 0,24.1,9.10^{-5} / 6,2.10^{-6} = 0,735$$

$$Nu = 115,43 = hD / \lambda \quad h = Nu \lambda / D = 115,43 \cdot 6,210^{-6} / 4.10^{-2}$$

$$h = 0,01789 \text{ Kcal/sm}^2\text{ }^\circ\text{C} \quad \text{ou} \quad h = 64,41 \text{ Kcal/hm}^2\text{ }^\circ\text{C}$$

VI.2°)

$$a^{\circ}) \quad \phi = h\Delta\theta S \quad ; \quad h = \phi/S\Delta\theta = \frac{3600 \cdot 6}{4,18 \cdot 2,2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 175} = \mathbf{85,37 \text{ Kcal/hm}^2\text{C}}$$

$$\text{Avec } \phi = 6\text{Kw} = 6.3600/4,18 \quad \Delta\theta = 175 ; S = L\pi D = 2,2 \pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}$$

$$b^{\circ}) \quad 6,2 \cdot 10^{-6} \text{ Kcal/sm}^2\text{C} = 6,2 \cdot 10^{-6} \cdot 3600 \text{ Kcal/hm}^2\text{C} = \mathbf{0,02232 \text{ Kcal/hm}^2\text{C}}$$

$$\text{Nu} = hD/\lambda = 85,37 \cdot 5 \cdot 10^{-2} / 0,02232 = \mathbf{191,24}$$

$$\text{Nu} = \mathbf{191,24} = 0,018 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,3} \quad \text{donc } \mathbf{Re} = \mathbf{122006,5}$$

$$c^{\circ}) \quad \text{Re} = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{4 q_v \rho}{\eta \pi D} \quad \text{sachant que } q_v = \frac{v \cdot \pi \cdot D^2}{4}$$

$$\text{Alors } q_v = \frac{\text{Re} \cdot \eta \pi D}{4 \rho} = 122006,5 \cdot 1,910^{-5} \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-2} / 4 \cdot 1,2 = 7,58 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\mathbf{q_v = 7,58 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}}$$

VI.3°)

$$\mathbf{q_v = v \cdot S = v \pi D^2 / 4}$$

$$a^{\circ}) \quad \text{Re} = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{4 q_v \rho}{\eta \pi D} = 4 \cdot 1,810^{-4} \cdot 983 / 0,47 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 15985,9$$

$\mathbf{Re} = \mathbf{15985,9} > 10^4$  régime turbulent le fluide se refroidit

$$\text{Donc : } \text{Nu} = 0,020 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,3}$$

$$\text{avec } \text{Pr} = c_p \eta / \lambda = 1,047 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 / 0,564 = 3$$

$$\text{Nu} = 64,12 = hD/\lambda \quad \text{donc } h = \text{Nu} \lambda / D = 64,12 \cdot 0,564 / 30 \cdot 10^{-3} = 1205,46$$

$$\mathbf{h = 1205,46 \text{ Kcal/hm}^2\text{C}}$$

b°)

h par rapport à la paroi interne du tube externe ( $D_3$ )

$$D_{eq} = (D_3^2 - D_2^2) / D_3 = 35,42 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad q_v = v \pi (D_3^2 - D_2^2) / 4$$

$$\text{et } v = 4 q_v / \pi (D_3^2 - D_2^2) \quad v = 0,129 \text{ m/s}$$

Qu'on remplace dans le nombre du Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{\rho v D_{eq}}{\eta} =$$

$$\text{Re} = 4 \cdot q_v \cdot \rho / D_3 \eta \pi = 4 \cdot 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot 983 / 50 \cdot 10^{-3} \cdot 0,47 \cdot 10^{-3} \cdot \pi = 9591,5$$

$\mathbf{Re} = \mathbf{9591,5}$  on suppose le régime turbulent ; presque  $> 10^4$

$$\text{Nu} = 0,02 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,3} \quad \text{avec } \text{Pr} = 3$$

$$\text{Nu} = 42,5 = hD_{\text{eq}}/\lambda \text{ donc } h = \text{Nu}D_{\text{eq}}/\lambda = 42,5 \cdot 35,42 \cdot 10^{-3} / 0,564 = 677$$

$$\mathbf{h = 677 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}}$$

c°)

$$\mathbf{D = (4qv/v\pi)^{1/2} = (4 \cdot 1,8 \cdot 10^{-4} / 0,129\pi)^{1/2} = 0,129 \text{ m}}$$
 c'est la vitesse en b°)

Dans ce cas **D = 42 mm** qu'on va remplacer dans le Reynolds

$$\text{Re} = \frac{4qv\rho}{\eta\pi D}$$

$$\text{Re} = 4 \cdot 983 \cdot 1,8 \cdot 10^{-4} / 0,47 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 42 \cdot 10^{-3} = 11418,5 > 10^4$$

$$\text{Donc } \text{Nu} = 0,02\text{Re}^{0,8}\text{Pr}^{0,3} = 48,99$$

$$h = \text{Nu}\lambda/D = 48,99 \cdot 0,564 / 42 \cdot 10^{-3} = 657,86$$

$$\mathbf{h = 657,86 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}}$$

**VI.4°)**

a°) h relatif à la paroi interne (D<sub>1</sub>)

$$\text{Re} = \frac{\rho v D_1}{\eta} = \frac{4qv\rho}{\eta\pi D_1} = \frac{4 \cdot 0,8 \cdot 10^{-4} \cdot 983}{0,4 \cdot 3,14 \cdot 40 \cdot 10^{-3}} = \mathbf{6261}$$

Donc le régime est intermédiaire

$$\text{Re} \text{ et } L/D = 4,8 / 40 \cdot 10^{-3} = 120 ; \text{ l'abaque nous permet d'extrapoler } \text{Jh} = 21,5$$

$$\text{Jh} = 21,5 = \left(\frac{cp\eta}{\lambda}\right)^{-1/3} \cdot \frac{hD}{\lambda} \left(\frac{\eta}{\rho p}\right)^{-0,14} ; \mathbf{h = 400 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}}$$

b°)

h relatif à la paroi externe du tube interne (D<sub>2</sub>)

$$D_{\text{eq}} = (D_3^2 - D_2^2) / D_2 = 44,75 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad q_v = v\pi(D_3^2 - D_2^2) / 4$$

qu'on remplace dans le nombre du Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{\rho v D_{\text{eq}}}{\eta} = 4 \cdot q_v \cdot \rho / D_2 \eta \pi = 4 \cdot 0,8 \cdot 10^{-4} \cdot 983 / 37 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} \cdot \pi = 6768$$

Donc le régime est intermédiaire

$$\text{Re} \text{ et } L/D = 4,8 / 44,75 \cdot 10^{-3} = 107,24 ; \text{ l'abaque nous permet d'extrapoler } \text{Jh} = 24,2$$

$$\text{Jh} = 24,2 = \left(\frac{cp\eta}{\lambda}\right)^{-1/3} \cdot \frac{hD}{\lambda} \left(\frac{\eta}{\rho p}\right)^{-0,14} ; \mathbf{h = 405 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}}$$

**VI.5°)**

- Coefficient de convection toluène paroi interne du tube interne ( $D_1$ )

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta} \quad ; \quad v = 4q_m / \rho D_1^2 \pi \quad ; \quad (q_v = q_m / \rho)$$

$$Re = \frac{4q_m}{\eta \pi D_1} = 4.2,5 / 0,6 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot \pi = 106157,1 > 10^4$$

Régime turbulent le fluide se refroidit :  $Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,3}$

$$Pr = c_p \eta / \lambda = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 / 0,12 = 7,2$$

$$Nu = 436,2 = h D_1 / \lambda \quad ; \quad h = Nu \lambda / D_1 = 436,2 \cdot 0,12 / 50 \cdot 10^{-3} = 1046,88$$

$$\mathbf{h = 1046,88 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}}$$

- Coefficient de convection eau paroi externe du tube intérieur ( $D_2$ )

$$Deq = (D_3^2 - D_2^2) / D_2 = (80 \cdot 10^{-3})^2 - (60 \cdot 10^{-3})^2 / 60 \cdot 10^{-3} = 46,67 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{et } v = 4q_m / \rho \pi (D_3^2 - D_2^2) \quad S = (D_3^2 - D_2^2) \pi / 4$$

Qu'on remplace dans le nombre du Reynolds :

$$Re = 4 \cdot q_m / D_2 \eta \pi = 4.2 / 6 \cdot 10^{-3} \cdot 0,36 \cdot 10^{-3} \cdot \pi = 117952,3$$

Régime turbulent le fluide se chauffe :  $Nu = 0,020 Re^{0,8} Pr^{0,4}$

$$Pr = 1 \cdot 0,36 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 / 0,565 = 2,29$$

$$Nu = 318 = h D_{eq} / \lambda \quad ; \quad h = Nu \lambda / D_{eq} = 318 \cdot 0,565 / 46,67 \cdot 10^{-3} = 3849$$

$$\mathbf{h = 3849 \text{ Kca/hm}^2\text{°C}}$$

**VI.6°)**

**a°)**

$$\phi = \Delta \theta / \Sigma R$$

$$\Sigma R = R_{int} + R_t + R_{iso} + R_{ext}$$

$$R_{int} = \frac{1}{h_{int} \cdot 2\pi r_1 L}$$

$$h_{int} = ?$$

$$Re = \frac{\rho v D_1}{\eta} = \frac{4q_m}{\eta \pi D_1} = 4.100 / 1,45 \cdot 10^{-5} \cdot \pi \cdot 52,5 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 = 46483,68 \quad (v = 4q_m / \pi D_1^2)$$

Régime turbulent le fluide se refroidit :  $Nu = 0,018 Re^{0,8} Pr^{0,3}$

$$Pr = cp\eta/\lambda = 0,48.1,45.10^{-5} .3600/0,024 = 1,044$$

$$Nu = 97,79 = hint D_1/\lambda : \quad hint = 44,71 \text{ Kcal/h}^\circ\text{C.m}^2$$

$$Rint = \frac{1}{hint.2\pi r_1 L} = \frac{1}{44,71.2.\pi.26,25.10^{-3}.1} = 0,1357 \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$Rt = \frac{\ln \frac{D_2}{D_1}}{2\pi L \lambda t} = \frac{\ln \frac{62}{52,5}}{2\pi.1.38,5} = 6,88.10^{-4} \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$Riso = \frac{\ln \frac{Diso}{D_2}}{2\pi L \lambda iso} = \frac{\ln \frac{122}{62}}{2\pi.1.0,05} = 2,1557 \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$Rext = \frac{1}{hext.2\pi r_{iso} L} \quad hext = hc + hr$$

$$hc = 1,14 \left( \frac{\Delta\theta}{Diso} \right)^{1/4} = 1,14 \left( \frac{150-15}{122.10^{-3}} \right)^{1/4} \quad hc = 6,575 \text{ Kcal/h}^\circ\text{C.m}^2$$

$$hr = \frac{\sigma_{iso}(T_2^4 - T_1^4)}{T_1 - T_2} = \frac{4,92.0,25(4,23^4 - 2,88^4)}{150-15} \quad hr = 2,29 \text{ Kcal/h}^\circ\text{C.m}^2$$

$$hext = hc + hr = 8,865 \text{ Kcal/h}^\circ\text{C.m}^2$$

$$Rext = \frac{1}{hext.2\pi r_{iso} L} = \frac{1}{8,865.2.\pi.61.10^{-3}.1} = 0,2945 \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$Rext = 0,2945 \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$\Sigma R = Rint + Rt + Riso + Rext = 2,5866 \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$\phi = \Delta\theta/\Sigma R = 135/ 2,5866 = 52,2 \text{ kcal/h}$$

*b\*) On crée un courant d'air perpendiculaire à la tuyauterie. Donc convection forcée à l'extérieur du tube et le transfert par rayonnement sera négligé devant le transfert par convection forcée.*

$$h'ext = ?$$

$$Re = \rho v D_{ext}/\eta = 1,165.2,5.122.10^{-3}/1,85.10^{-5} = 19206,76$$

$$\text{Régime turbulent et le fluide se chauffe : } Nu = 0,018 Re^{0,8} Pr^{0,4}$$

$$Pr = cp\eta/\lambda = 3600.0,25.1,85.10^{-5}/0,023 = 0,724$$

$$Nu = 42,26 = h'ext D_{iso}/\lambda_{air} \quad h'ext = 42,26.0,023/122.10^{-3} = 7,97 \text{ Kcal/h}^\circ\text{C.m}^2$$

$$R'ext = \frac{1}{h'ext.2\pi r_{iso} L} = \frac{1}{7,97.2.\pi.122.10^{-3}.1} = 0,3275 \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$\phi' = \Delta\theta/\Sigma R'$$

$$\Sigma R' = R_{int} + R_t + R_{iso} + R'_{ext} = 2,6196 \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$\phi' = 135/2,6196 = 51,53 \text{ Kcal/h}$$

VI.7°)

Il faut d'abords calculer le flux de chaleur avant et après isolation

$$h_r = 4,8911 \text{ Kcal/h}^\circ\text{C.m}^2$$

Flux de chaleur avant isolation

$$h_{ext} = h_c + h_r = 9,7896 \text{ Kcal/h}^\circ\text{C.m}^2$$

$$\phi = \Delta\theta/\Sigma R$$

$$R_{ext} = \frac{1}{h_{ext} \cdot 2\pi r_2 L} =$$

$$\Sigma R = R_{int} + R_t + R_{ext}$$

$$R_{ext} = 7,3935 \cdot 10^{-3} \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$R_{int} = \frac{1}{h_{int} \cdot 2\pi r_1 L}$$

Flux chaleur après isolation

$$R_t = \frac{\ln \frac{D_2}{D_1}}{2\pi L \lambda t} = 1,065 \cdot 10^{-4} \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$\phi' = \Delta\theta/\Sigma R'$$

$$R_{ext} = \frac{1}{h_{ext} \cdot 2\pi r_2 L}$$

$$\Sigma R = R_{int} + R_t + R_{iso} + R'_{ext}$$

$$R_{int} = \frac{1}{h_{int} \cdot 2\pi r_1 L}$$

$$h_{ext} = h_c + h_r$$

$$R_t = \frac{\ln \frac{D_2}{D_1}}{2\pi L \lambda t} = 1,065 \cdot 10^{-4} \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$h_c = 1,14 \left(\frac{\Delta\theta}{D_2}\right)^{1/4} = 1,14 \left(\frac{100-25}{220 \cdot 10^{-3}}\right)^{1/4}$$

$$R_{iso} = \frac{\ln \frac{Diso}{D_2}}{2\pi L \lambda_{iso}} = 0,022167 \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$h_c = 4,8985 \text{ Kcal/h}^\circ\text{C.m}^2$$

$$R'_{ext} = \frac{1}{h_{ext} \cdot 2\pi r_{iso} L}$$

$$h_r = \frac{\sigma \varepsilon p (T_1^4 - T_2^4)}{T_1 - T_2} = \frac{4,92 \cdot 0,65 (3,73^4 - 2,98^4)}{373 - 298}$$

$$h'_{ext} = h'c + h'r$$

$$h'c = 1,14 \left( \frac{\Delta\theta}{Diso} \right)^{1/4} = 1,14 \left( \frac{100-25}{260.10^{-3}} \right)^{1/4}$$

$$h'r = 1,8812 \text{ Kcal/h}^\circ\text{C.m}^2$$

$$h'c = 4,6981 \text{ Kcal/h}^\circ\text{C.m}^2$$

$$h'ext = h'c + h'r = 6,5793 \text{ Kcal/h}^\circ\text{C.m}^2$$

$$h'r = \frac{\sigma_{iso}(T_{14}-T_{24})}{T_1-T_2} = \frac{4,92.0,25(3,73^4 - 2,98^4)}{373-298}$$

$$R'ext = \frac{1}{h'ext.2\pi r_{iso}L}$$

$$R'ext = 9,3087.10^{-3} \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

Maintenant calculer Rint dans les deux cas :  $Rint = \frac{1}{hint.2\pi r_1 L}$

$$hint = ?$$

$$Re = \frac{\rho v D_1}{\eta} = \frac{4qm}{\eta \pi D} = 4.900 / 1,45.10^{-5} . \pi . 180.10^{-3} . 3600 = 1,0220197.10^{+5} \quad (v = 4qm/\pi D_1^2)$$

Régime turbulent le fluide se refroidit :  $Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,3} \quad Pr = 0,037 = cp\eta/\lambda$

$$Nu = 100,299 = hint D_1 / \lambda : \quad hint = 362,19 \text{ Kcal/h}^\circ\text{C.m}^2$$

$$Rint = \frac{1}{hint.2\pi r_1 L} = \frac{1}{362,19.2.\pi.90.10^{-3}.20} = 2,442.10^{-4} \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$\Sigma R = Rint + Rt + Rext$$

$$\Sigma R' = Rint + Rt + Riso + R'ext$$

$$\Sigma R = 7,744.10^{-3} \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$\Sigma R' = 0,0318 \text{ h}^\circ\text{C/Kcal}$$

$$\phi = 75 / 7,744.10^{-3} = 9684,92 \text{ Kcal/h}$$

$$\phi' = 75 / 0,0318 = 2358,49 \text{ Kcal/h}$$

$$\Delta\phi = \phi - \phi' = 7326,43 \text{ Kcal/h} \times 2300 \text{ h} = 16850789 \text{ kcal} \times 4,18/3600 = 19571,184 \text{ Kwh}$$

$$19571,184 \text{ Kwh} \times 0,95 \text{ Dh} = 18592,62 \text{ Dh}$$

$$\text{Prix de l'isolant est : } 20.200 \text{ Dh} = 4000 \text{ Dh}$$

$$\text{Bénéfice} = 18592,62 - 4000 = 14592,62 \text{ Dh}$$

$$\text{Bénéfice} = 14593 \text{ Dh}$$



## Chapitre 7 : LES ECHANGEURS DE CHALEUR

Un échangeur de chaleur est un dispositif permettant de transférer de l'énergie thermique entre deux fluides, habituellement séparés par une paroi solide.

### 1°) Echangeurs tubulaires simples

#### 1.1°) Généralités

- échangeurs tubulaires simples ou échangeurs double tube
- constitué par deux tubes concentriques
- généralement le fluide chaud circule dans le tube intérieur
- généralement le fluide froid circule dans l'espace annulaire
- le transfert de chaleur s'effectue à travers la paroi du tube intérieur.

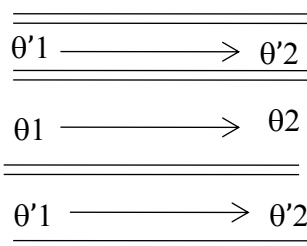
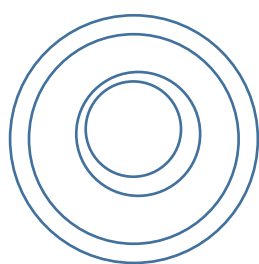
Hypothèses :

- il n'y a pas de pertes thermiques (la surface de séparation est la seule surface d'échange thermique)
- pas de changement de phase au cours du transfert
- 

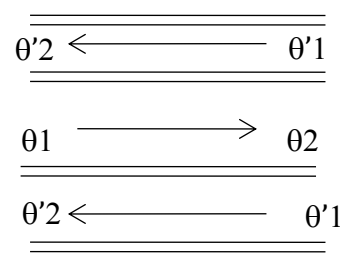
#### Conventions :

Le fluide chaud entre à la température  $\theta_1$  et sort à la température  $\theta_2$  (T1 et T2)

Le fluide froid entre à la température  $\theta'_1$  et sort à la température  $\theta'_2$  (t1 et t2)

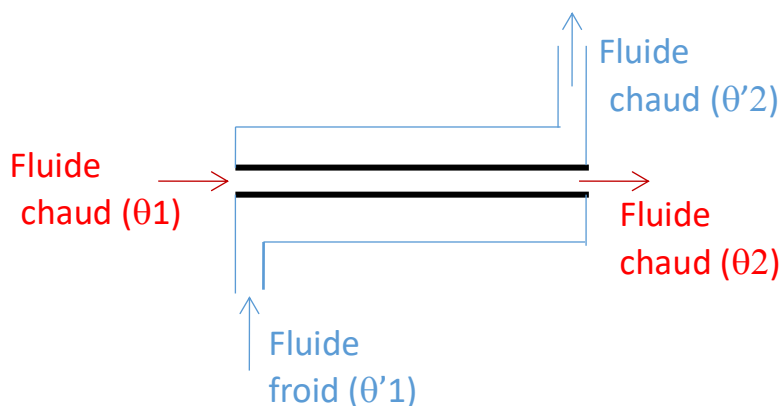


Fonctionnement à co-courant  
ou courant parallèle



Fonctionnement à contre-courant

*L'entrée de l'échangeur de chaleur correspond toujours à l'entrée du fluide chaud*



### 1.2\*) Expression du flux de chaleur

Comme il n'y a pas de pertes thermiques, le flux de chaleur cédé par le fluide chaud est intégralement récupéré par le fluide froid:

$$q_{v\rho c_p} (\Theta_1 - \Theta_2) = q'_{v\rho'c_p'} (\Theta'_2 - \Theta'_1) = \phi \quad \text{Kcal/h}$$

$q_{v\rho c_p} = q_c$  : débit calorifique du fluide chaud (**Kcal/h.°C**)

$q'_{v\rho'c_p'} = q'_c$  : débit calorifique du fluide froid (**Kcal/h.°C**)

Dans ce cas le flux de chaleur échangé entre les deux fluides est:

$$\phi = q_c (\Theta_1 - \Theta_2) = q'_c (\Theta'_2 - \Theta'_1)$$

Par ailleurs, le flux de chaleur échangé entre deux fluides à travers la paroi d'un tube cylindrique circulaire est donné par la relation suivante :

$$\phi = \frac{\Delta\theta}{\frac{1}{2\pi h_1 L r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L \lambda} + \frac{1}{2\pi h_2 L r_2}}$$

Dans les échangeurs de chaleur on rapporte le flux à la surface  $S_2 = 2\pi L r_2$

Donc:

$$\phi = U_2 S_2 \Delta\theta$$

En combinant les deux dernières équations, on obtient :

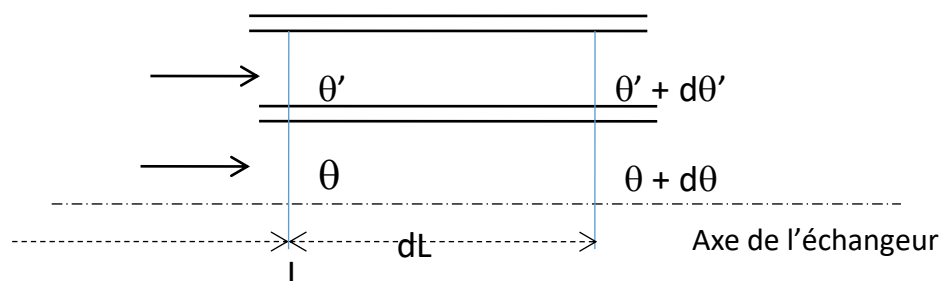
$$\frac{1}{U_2} = \frac{1}{\frac{r_2}{h_1 r_1} + \frac{r_2 \ln(r_2/r_1)}{\lambda} + \frac{1}{h_2}}$$

### 1.3\*) Le coefficient global de transfert de chaleur peut être pris comme constant

Les grandeurs physiques liées au fluide et dépendant de la température ( $\rho$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$ ,  $c_p$ ) sont déterminées pour chaque fluide à la température moyenne :  $T_m = (T_E + T_S)/2$ . Dans ce cas on considère que le coefficient global de transfert de chaleur est constant tout au long de l'échangeur.  $Nu = f(Re, Pr) = hD/\lambda = f((\rho v D/\eta), c_p \eta/\lambda)$

#### 1.3.1°) Fonctionnement à co-courant

Soit un échangeur de longueur  $L_E$ . Faisons le bilan thermique dans une partie élémentaire de l'échangeur de longueur  $dL$  situé à la côte  $L$  de l'entrée.



A la côte  $L$ : on a  $\theta$  et  $\theta'$

A la côte  $L + dL$ : on a  $\theta + d\theta$  et  $\theta' + d\theta'$

Le flux de chaleur à travers la paroi intérieure =  $UdS(\theta - \theta')$

Flux de chaleur cédé par le fluide chaud le long de la partie élémentaire =

$$q_v \cdot \rho \cdot c_p \cdot \theta - q_v \cdot \rho \cdot c_p (\theta + d\theta) = -q_v \cdot \rho \cdot c_p \cdot d\theta :$$

Avant de continuer on définit  $qc$  comme étant le **débit calorifique** ;  $qc = q_v \cdot \rho \cdot c_p$  ,

On vérifie l'unité :  $(m^3/h)(Kg/m^3)(Kcal/^\circ C \cdot Kg)$ : **Kcal/h.°C**

Donc le flux de chaleur cédé par le fluide chaud le long de la partie élémentaire est :

$$-qc \cdot d\theta \text{ égale au flux à travers le tube intérieur} = UdS(\theta - \theta')$$

$$-qc \cdot d\theta = UdS(\theta - \theta')$$

Donc

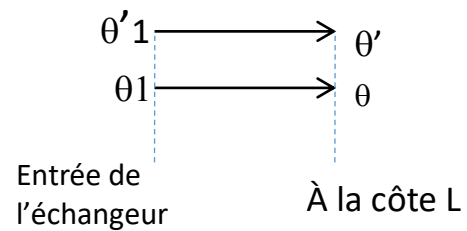
$$\frac{d\theta}{\theta - \theta'} = -\frac{US}{qc}$$

La température du fluide froid  $\theta'$  est liée à la température du fluide chaud  $\theta$

Il faut donc établir une relation :  $\theta' = f(\theta)$  avant d'intégrer.

On sait que le flux de chaleur perdu par le fluide chaud est intégralement récupéré par le fluide froid puisqu'il n'y a pas de perte thermique.

Faisant le bilan thermique partiel à la côte L :



$$qc(\theta_1 - \theta) = q'c(\theta' - \theta'_1)$$

$$\theta' = \frac{qc}{q'c} \cdot (\theta_1 - \theta) + \theta'_1$$

On remplace la valeur de  $\theta'$  dans l'équation initiale :

$$\frac{-US}{qc} = \frac{d\theta}{\theta - \frac{qc}{q'c}(\theta_1 - \theta) - \theta'_1}$$

En intégrant pour l'échangeur de surface totale S :

$$-\int_0^S \frac{Uds}{qc} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\theta - \frac{qc}{q'c}(\theta_1 - \theta) - \theta'_1}$$

$$-\int_0^S \frac{Uds}{qc} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\theta \left(1 + \frac{qc}{q'c}\right) - \left(\theta'_1 + \left(\frac{qc}{q'c}\right)\theta_1\right)}$$

$$- \frac{US}{qc} =$$

$$\frac{1}{1 + qc/q'c} \ln \left[ \theta_2 \left(1 + \frac{qc}{q'c}\right) - \left(\theta'_1 + \left(\frac{qc}{q'c}\right)\theta_1\right) \right] / \ln \left[ \theta_1 \left(1 + \frac{qc}{q'c}\right) - \left(\theta'_1 + \left(\frac{qc}{q'c}\right)\theta_1\right) \right]$$

Le numérateur :

$$\ln \left[ \theta_2 \left(1 + \frac{qc}{q'c}\right) - \left(\theta'_1 + \left(\frac{qc}{q'c}\right)\theta_1\right) \right] = \ln \left[ \theta_2 + \theta_2 \left(\frac{qc}{q'c}\right) - \theta'_1 - \left(\frac{qc}{q'c}\right)\theta_1 \right]$$

$$= \ln\left[\theta_2 + (\theta_2 - \theta_1) \left(\frac{qc}{q'c}\right) - \theta'1\right]$$

Du bilan global de l'échangeur :

$$qc(\theta_1 - \theta_2) = q'c(\theta'2 - \theta'1)$$

$$\text{On aura : } -\theta_2 = (\theta_2 - \theta_1) \left(\frac{qc}{q'c}\right) - \theta'1$$

On remplace  $-\theta_2$  par sa valeur :

$$\text{Le numérateur égal alors : } \ln[\theta_2 - \theta'2]$$

$$\text{Le dénominateur : } \ln\left[\theta_1 \left(1 + \frac{qc}{q'c}\right) - \left(\theta'1 + \left(\frac{qc}{q'c}\right)\theta_1\right)\right] = \ln(\theta_1 - \theta'1)$$

$$\text{Donc : } -\frac{US}{qc} = \frac{1}{1+qc/q'c} \ln\left[\frac{(\theta_2 - \theta'2)}{(\theta_1 - \theta'1)}\right]$$

$$\frac{1}{1+qc/q'c} = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{(\theta_1 - \theta_2) + (\theta'2 - \theta'1)}$$

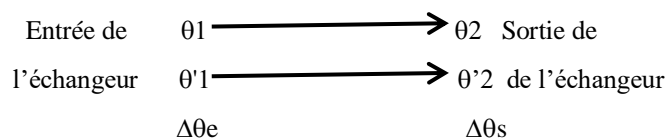
Du bilan global de l'échangeur :

$$qc(\theta_1 - \theta_2) = q'c(\theta'2 - \theta'1) : qc/q'c = (\theta'2 - \theta'1) / (\theta_1 - \theta_2)$$

Alors

$$: -\frac{US}{qc} = \frac{1}{1+qc/q'c} \ln\left[\frac{(\theta_2 - \theta'2)}{(\theta_1 - \theta'1)}\right] =$$

$$\frac{(\theta_1 - \theta_2)}{(\theta_1 - \theta'1) - (\theta_2 - \theta'2)} \ln\left[\frac{(\theta_2 - \theta'2)}{(\theta_1 - \theta'1)}\right]$$



On pose :  $\Delta\theta_e = \theta_1 - \theta'1$  différence de température des deux fluides à l'entrée

Et  $\Delta\theta_s = \theta_2 - \theta'2$  différence de température des deux fluides à la sortie

$$\text{Donc : } -\frac{US}{qc} = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{\Delta\theta_e - \Delta\theta_s} \ln\left(\frac{\Delta\theta_s}{\Delta\theta_e}\right)$$

$$qc(\theta_1 - \theta_2) = US \cdot (\Delta\theta_s - \Delta\theta_e) / \ln\left(\frac{\Delta\theta_s}{\Delta\theta_e}\right) = US(\Delta\theta)_m = \phi = \mathbf{US(\Delta\theta)_m}$$

$qc(\theta_1 - \theta_2)$  : représente le flux de chaleur cédé par le fluide chaud lors de son passage dans l'échangeur

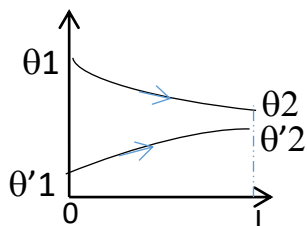
$(\Delta\theta_s - \Delta\theta_e) / \ln\left(\frac{\Delta\theta_s}{\Delta\theta_e}\right) = (\Delta\theta)_m$  : représente la moyenne logarithmique de la différence de la fonction  $\Delta\theta$  entre l'entrée et la sortie de l'échangeur.

$\Delta\theta$ : représente l'écart de température entre les deux fluides dans un même plan transversal de l'échangeur.

$$\phi = US(\Delta\theta)_m$$

**Remarque:** on prend généralement le coefficient global de transfert thermique ramené à la surface extérieure du tube intérieur.

La distribution des températures le long de l'échangeur à l'allure suivante:



Si  $\theta'_2 = \theta_2$  il n'y aura plus d'échange thermique. Impossible d'avoir une température du fluide froid supérieure à la température du fluide chaud. Pour une surface **d'échange infinie** on aura une température limite :  $\theta_{lim} = \theta = \theta'$

Du bilan partiel à la côte L: on a  $q_c (\theta_1 - \theta) = q'c(\theta' - \theta'_1)$

$$\frac{q_c}{q'c} (\theta_1 - \theta) = (\theta' - \theta'_1) \quad \text{on pose} \quad z = \frac{q_c}{q'c}; \quad \text{on aura} \quad z (\theta_1 - \theta) = (\theta' - \theta'_1)$$

$$z (\theta_1 - \theta_{lim}) = (\theta_{lim} - \theta'_1) \quad \text{on a remplacé } \theta \text{ et } \theta' \text{ par } \theta_{lim}$$

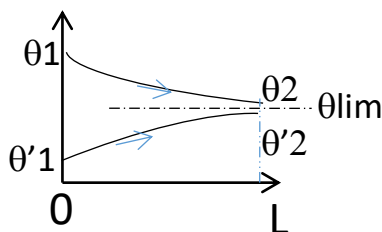
$$\text{On peut écrire que } (\theta_1 - \theta'_1) = (\theta_1 - \theta_{lim}) + (\theta_{lim} - \theta'_1)$$

En combinant les deux dernières équations :

$$(\theta_1 - \theta'_1) = (\theta_1 - \theta_{lim}) + z (\theta_1 - \theta_{lim}); \quad (\theta_1 - \theta'_1) = (\theta_1 - \theta_{lim}).(1 + z)$$

$$\text{Alors} \quad \theta_{lim} = \theta_1 - (\theta_1 - \theta'_1) / (1 + z)$$

$\theta_2$  et  $\theta'_2$  se rapprochent asymptotiquement de la température limite ( $\theta_{lim}$ )



### 1.3.2°) Fonctionnement à contrecourant

Le même calcul effectué pour le co-courant nous conduit à la même expression :

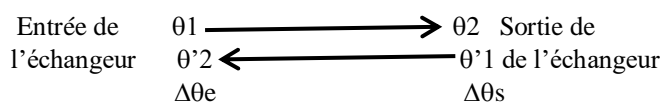
$$\phi = US(\Delta\theta)_m$$

Mais il faut faire attention au niveau des différences de température entre les deux fluides

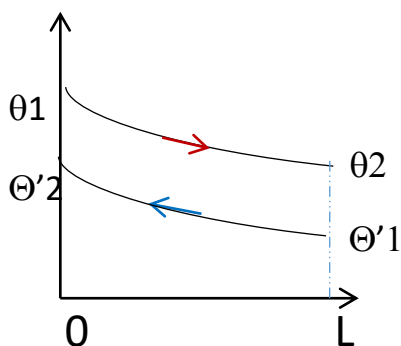
$$(\Delta\theta)_m = (\Delta\theta_s - \Delta\theta_e) / \ln\left(\frac{\Delta\theta_s}{\Delta\theta_e}\right)$$

**Avec :**  $\Delta\theta_e = \theta_1 - \theta'_2$  différence de température des deux fluides à l'entrée

Et  $\Delta\theta_s = \theta_2 - \theta'_1$  différence de température des deux fluides à la sortie

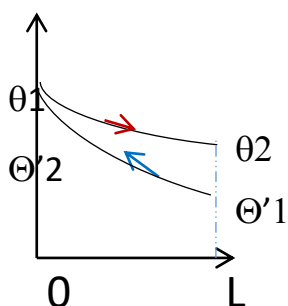


La distribution des températures le long de l'échangeur fonctionnant à contrecourant à l'allure suivante:

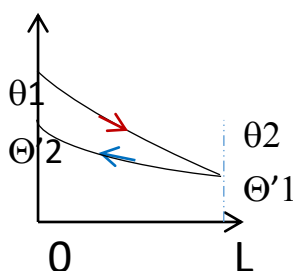


$\theta'_2$  pourrait être supérieure à  $\theta_2$  contrairement au fonctionnement à co-courant

Pour une surface infinie on peut avoir les deux configurations suivantes :



$$\theta_1 = \theta'_2$$



$$\theta'_1 = \theta_2$$

$\theta_1$  est la limite supérieure de  $\theta'_2$

$\theta'_1$  est la limite inférieure de  $\theta_2$

### 1.3.3°) Comparaison entre les deux modes de fonctionnement

Pour un échangeur double tube, on demande de comparer les deux modes de fonctionnement sachant que :

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 300 \text{ °C} & ; & & \theta_2 &= 200 \text{ °C} \\ \theta'_1 &= 20 \text{ °C} & ; & & \theta'_2 &= 100 \text{ °C}\end{aligned}$$

$$174,82 \quad ; \quad 189,82$$

Le flux de chaleur est égal à  $\phi = US(\Delta\theta)_m$

Pour un même échangeur U et S sont constants, seule la moyenne logarithmique qui change pour un fonctionnement différent. Donc pour pouvoir comparer les deux modes il suffit de calculer la moyenne logarithmique dans chaque cas.

### Condensation corrosive et dépôt par solidification

#### 1.4°) le coefficient global de transfert ne peut pas être considéré comme constant

Pour des variations des grandeurs physiques avec la température, le coefficient global de transfert de chaleur ne peut pas être considéré comme constant. La séparation des variables dans l'équation différentielle de base et telle qu'il faut résoudre :

$$- \int_0^s \frac{S}{qc} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{U(\theta - \theta')}$$

Plusieurs méthodes sont disponibles pour résoudre cet intégral, à savoir :

- Méthode des températures calorifiques
- Résolution graphique
- Méthode de Colburn

Dans ce cours on traitera la méthode de Colburn :

Colburn fait l'hypothèse que le coefficient global de transfert U, varie linéairement en fonction de l'écart de température,  $\theta - \theta' = \Delta\theta$ , des deux fluides dans un même plan transversal de l'échangeur :  $U = a + b \Delta\theta$

à l'entrée de l'échangeur on a :  $U_e = a + b \Delta\theta_e$

à la sortie de l'échangeur on a :  $U_s = a + b \Delta\theta_s$

$U_e$  et  $U_s$  représentent respectivement les coefficients de transfert à l'entrée et à la sortie de l'échangeur.



$\Delta\theta_e$  et  $\Delta\theta_s$  représentent respectivement les différences de températures des deux fluides à l'entrée et à la sortie de l'échangeur.

$$Ue - Us = a + b \Delta\theta_e - a - b \Delta\theta_s \quad \text{donc } b = \frac{Ue - Us}{\Delta\theta_e - \Delta\theta_s}$$

$$\text{et } a = Ue - b\Delta\theta_e = Ue - \frac{Ue - Us}{\Delta\theta_e - \Delta\theta_s} \Delta\theta_e$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{U(\theta - \theta')} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{a + b\Delta\theta} \cdot \frac{d\theta}{\Delta\theta}$$

Du bilan partiel à la côte L, on a :  $\Delta\theta = \theta - \theta' = (1 + \frac{qc}{q'c})\theta - (\frac{qc}{q'c}\theta_1 + \theta'_1) = c\theta - d$

Par identification on a :  $(1 + \frac{qc}{q'c}) = c$  et  $(\frac{qc}{q'c}\theta_1 + \theta'_1) = d$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{a + b\Delta\theta} \cdot \frac{d\theta}{\Delta\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{a + b(c\theta - d)} \cdot \frac{d\theta}{c\theta - d} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{bc\theta + a - bd} \cdot \frac{d\theta}{c\theta - d} = - \int_0^s \frac{S}{qc}$$

$$\frac{1}{bc\theta + a - bd} \cdot \frac{1}{c\theta - d} = \frac{A}{bc\theta + a - bd} + \frac{B}{c\theta - d}$$

par identification on trouve  $A = -b/a$  et  $B = 1/a$

$$\text{Donc } - \int_0^s \frac{S}{qc} = \frac{-b}{a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{bc\theta + a - bd} + \frac{1}{a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{c\theta - d}$$

La résolution donne :-  $\frac{S}{qc} = - \frac{1}{ac} [\ln(bc\theta + a - bd)]_{\theta_1}^{\theta_2} + \frac{1}{ac} [\ln(c\theta - d)]_{\theta_1}^{\theta_2}$

$$\text{Donc : } - \frac{S}{qc} = \frac{1}{ac} \left[ \ln \frac{c\theta - d}{bc\theta + a - bd} \right]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{1}{ac} \ln \left( \frac{\Delta\theta_s \cdot Ue}{\Delta\theta_e \cdot Us} \right)$$

$qc = \frac{-acS}{\ln \left( \frac{\Delta\theta_s \cdot Ue}{\Delta\theta_e \cdot Us} \right)}$  en multipliant chaque membre par  $\theta_1 - \theta_2$  on aura :

$$\phi = \frac{-acS(\theta_1 - \theta_2)}{\ln \left( \frac{\Delta\theta_s \cdot Ue}{\Delta\theta_e \cdot Us} \right)}$$

On remplaçant a et c par leurs expression on aura :

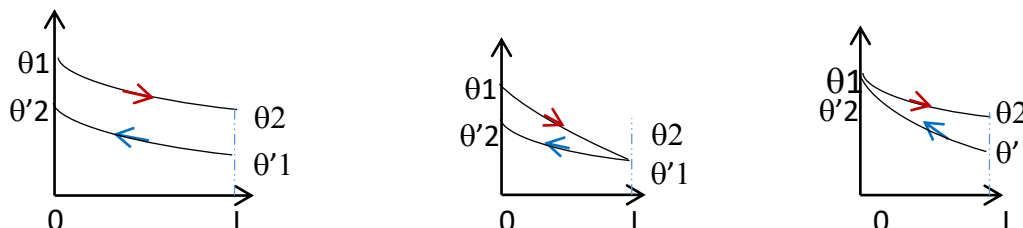
$$(\mathbf{U}\Delta\theta)_m = \frac{Ue\Delta\theta_s - Us\Delta\theta_e}{\ln \left( \frac{Ue\Delta\theta_s}{Us\Delta\theta_e} \right)}$$

$$\phi = (\mathbf{U}\Delta\theta)_m \cdot S$$

Moyenne logarithmique du produit  $U\Delta\theta$ , mais il est important de noter que chaque produit comprend l'écart de température  $\Delta\theta$  d'une extrémité de l'échangeur associé au coefficient de transfert  $U$  de l'autre extrémité.

### 1.5°) Efficacité d'un échangeur

#### 1.5.1°) contre-courant



L'efficacité d'un échangeur de chaleur fonctionnant à contre-courant est le rapport entre le flux de chaleur effectivement transféré par l'échangeur et le flux de chaleur maximal transférable dans les conditions d'une surface infinie qui permet d'obtenir la température finale d'un des deux fluides, identique, en fin d'opération, à la température initiale de l'autre fluide.

Du bilan calorifique  $q_c (\theta_1 - \theta_2) = q'c (\theta'2 - \theta'1)$  le fluide qui a le plus faible débit calorifique accuse naturellement un changement de température plus important. C'est donc de lui que dépendra la quantité de chaleur qui pourra être transférée. On dit qu'il **commande le transfert**.

*Hypothèse :*

- le fluide chaud commande le transfert : ( $q_c < q'c$ )
- le flux de chaleur transféré :  $\phi = q_c (\theta_1 - \theta_2)$
- le flux de chaleur maximal transférable:  $\phi = q_c (\theta_1 - \theta'1)$

d'où 
$$E_r = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_1 - \theta'1}$$

Si  $\theta_2 = \theta_1$   $E_r = 0$  (pas de transfert de chaleur)

Si  $\theta_2 = \theta'1$   $E_r = 1$  (surface d'échange infinie)

Numérateur: refroidissement réel du fluide

Dénominateur: refroidissement maximal possible du fluide

Efficacité de refroidissement = 
$$E_r = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_1 - \theta'1}$$

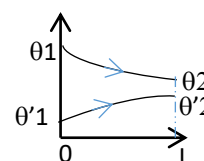
Si le fluide froid commande le transfert ( $q'c < qc$ )

On aura de la même façon, l'efficacité de chauffage:  $E_c = \frac{(\theta'2 - \theta'1)}{\theta_1 - \theta'1}$

Numérateur: élévation réelle de la température du fluide froid

Dénominateur: élévation maximale possible de la température du fluide froid.

### 1.5.2°) co-courant



L'efficacité d'un échangeur de chaleur fonctionnant à co-courant est le rapport entre le flux de chaleur effectivement transféré par l'échangeur et le flux de chaleur maximal transférable dans les conditions d'une surface infinie, la température des deux fluides dans ce cas étant  $\theta_{lim}$ .

$$\text{Efficacité de refroidissement: } E_r = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_1 - \theta_{lim}}$$

$$\text{Efficacité de chauffage: } E_c = \frac{(\theta'2 - \theta'1)}{\theta_{lim} - \theta'1}$$

Généralement dans l'industrie les rendements (efficacités) sont de l'ordre de 85 à 90% par rapport à la surface économique utilisée.

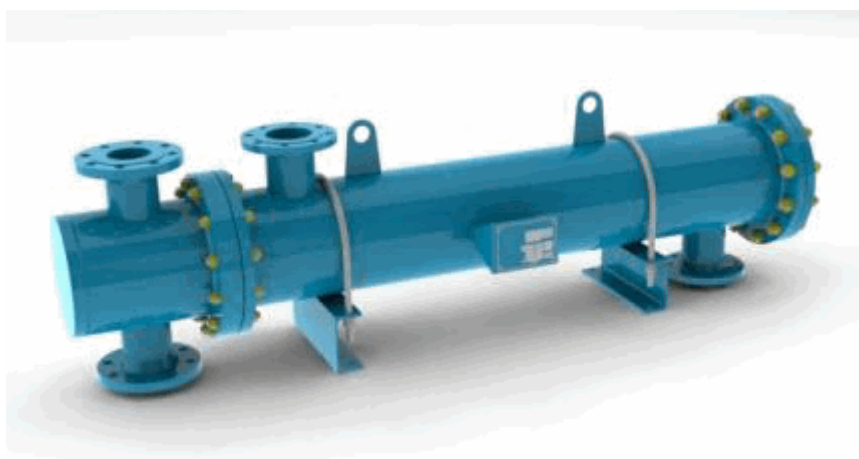
L'efficacité dans le cas des gaz est de l'ordre de 60 %, parce que le coefficient global de transfert thermique est nettement plus faible que celui des liquides.

#### **Remarque:**

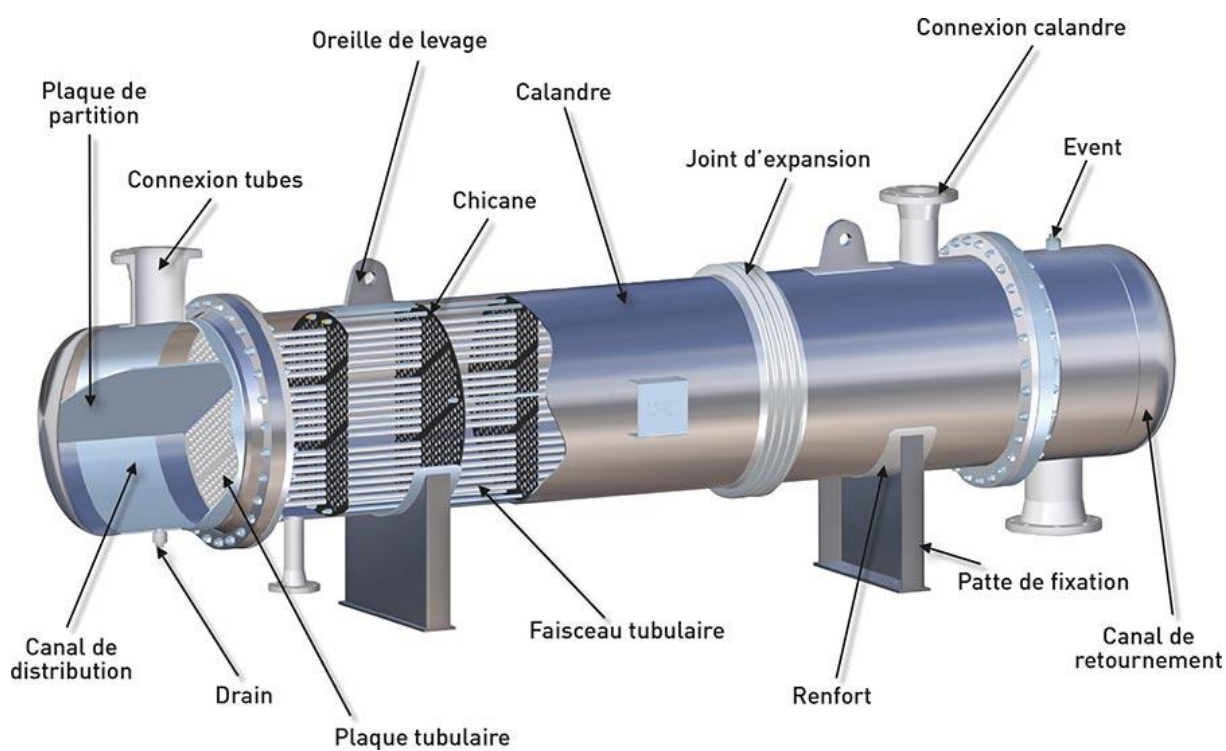
L'optimisation d'un échangeur de chaleur est un problème complexe lié à la dualité transfert de chaleur-pertes de charge.

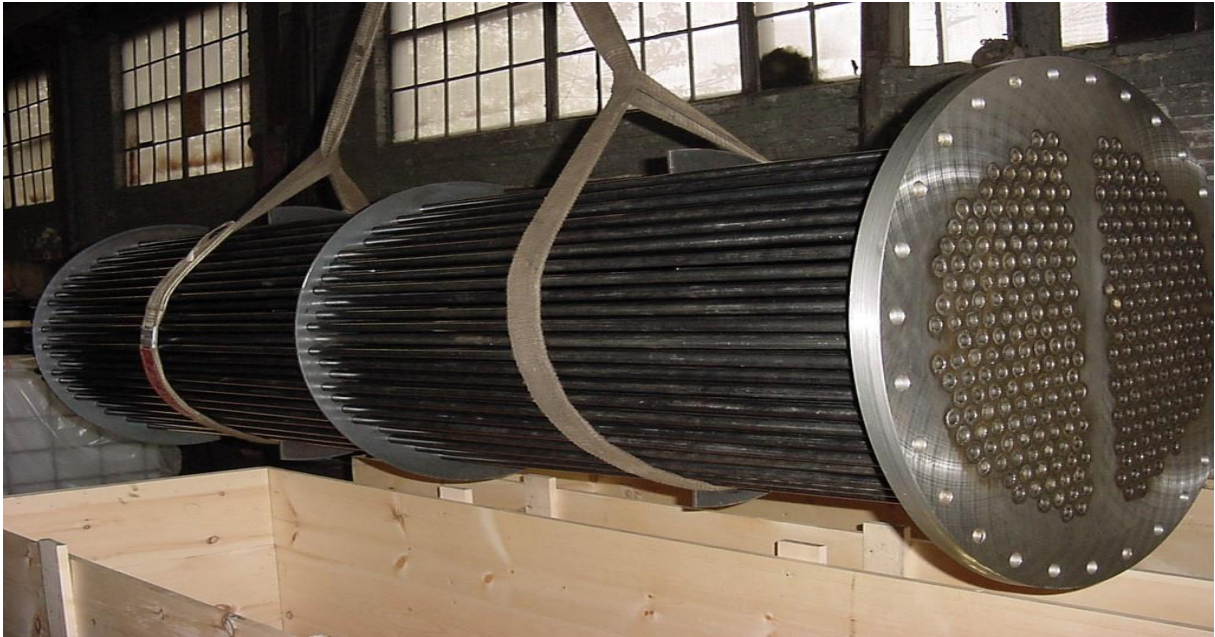
La résistance au transfert thermique est d'autant plus faible que les couches limites dynamiques (film laminaire) sont faibles. Par conséquent des nombres de Reynolds élevés entraînent une réduction de la surface d'échange, donc une économie. Malheureusement un accroissement du nombre de Reynolds provoque une augmentation des pertes de charge, ce qui implique un supplément d'énergie à fournir aux fluides et par voie de conséquence des frais opératoires plus élevés.





**Figure 1 : Echangeur tubulaire**  
(source : Barriquand)





<https://www.youtube.com/watch?v=8mZLj1e7Afo>

### 2.1.2°) Expression du flux de chaleur

Dans un tel échangeur, l'expression de  $(\Delta\theta)_m$  obtenue par intégration est très complexe, on préfère mettre le flux sous la forme :

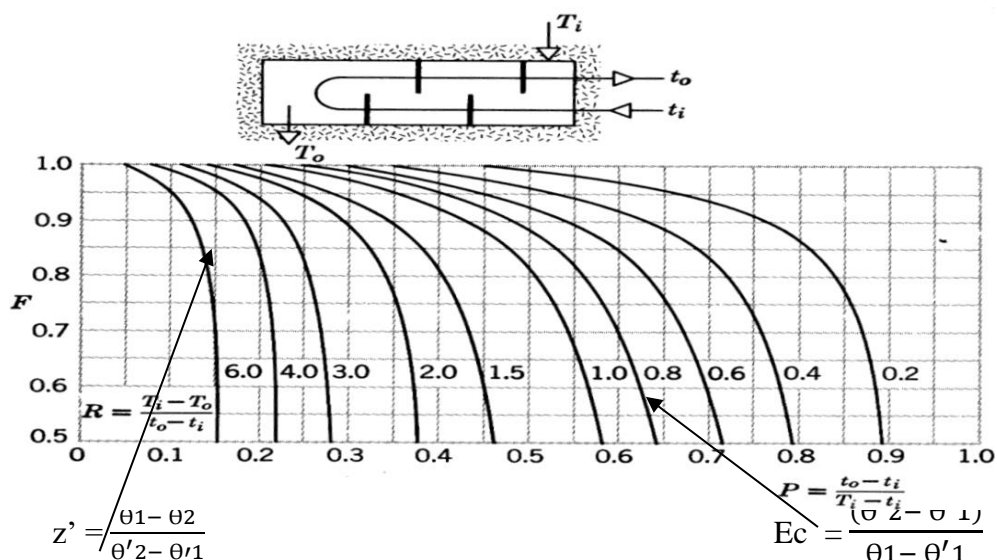
$$\phi = US(\Delta\theta)_m F$$

$(\Delta\theta)_m$  : est la moyenne logarithmique d'un fonctionnement à **contre-courant pur** et F est un facteur de correction qui traduit l'efficacité de l'appareil par rapport au contre-courant pur.

$$F = f(z', Ec)$$

$$z' = 1/z = q'c/qc = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta'_2 - \theta'_1}$$

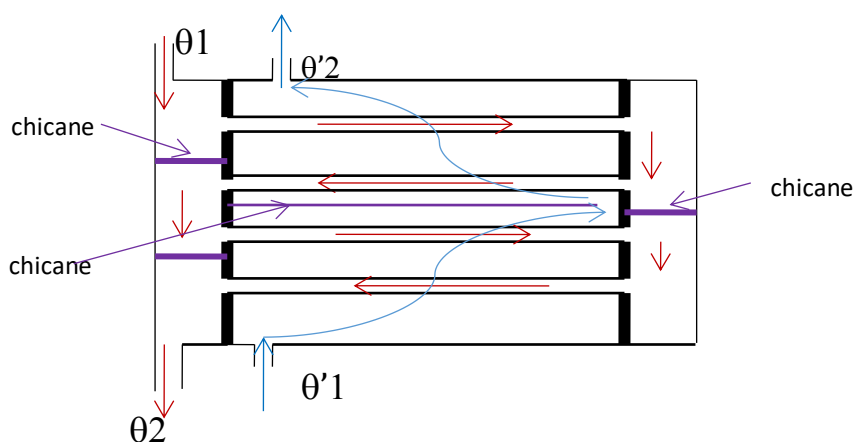
$$Ec = \frac{(\theta'_2 - \theta'_1)}{\theta_1 - \theta'_1}$$



Pour tous les appareils à une passe côté calandre et un nombre pair de passes en tubes, on détermine  $F$  à l'aide d'un abaque unique. Si  $F$  supérieur ou égale à 0,8 l'échangeur est bien dimensionné, sinon il faut passer à une autre configuration.

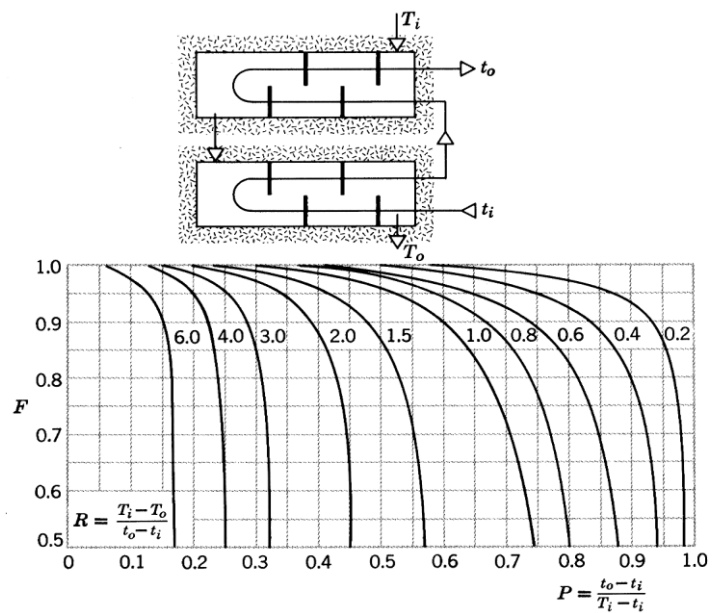
### 2.2\*) Echangeurs 2-4

L'appareil comporte une chicane longitudinale, de sorte que le fluide enveloppe effectue deux passages. Le fluide dans les tubes effectue quatre passages.



De la même façon on détermine  $(\Delta\theta)_m$  et puis  $F$  par des abaques :





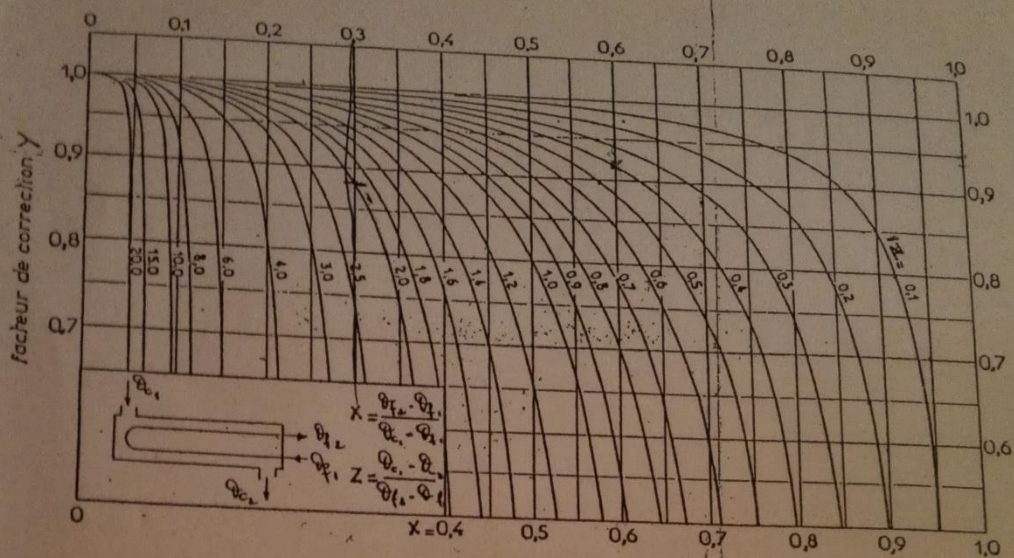
Si  $F$  supérieur ou égale à 0,75, l'échangeur est bien dimensionné, sinon il faut passer à la configuration suivante, à savoir 3-6 ou 4-8. Mais généralement dans l'industrie on se limite à 1-2 ou 2-4.



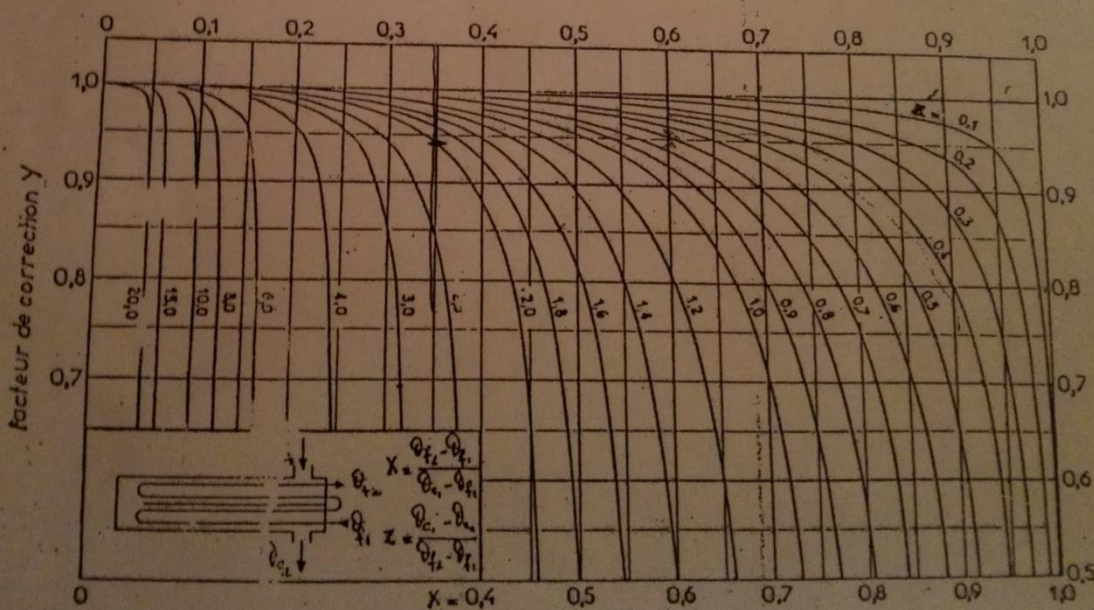
1066

LE PÉTROLE - RAFFINAGE ET GÉNIE CHIMIQUE

(10)



a. une passe côté calandre, deux passes (ou plus) côté tubes.



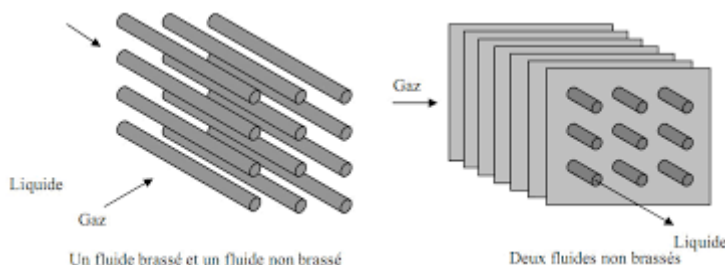
b. deux passes côté calandre, quatre passes (ou plus) côté tubes.

Fig. V.1.14. — Détermination du facteur

### 3°) Echangeurs à courants croisés

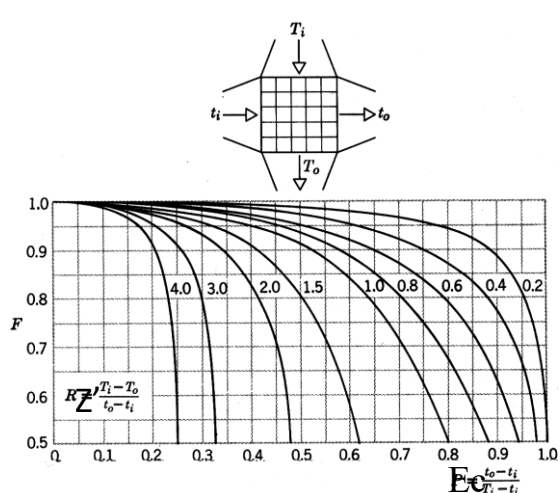
Les deux fluides circulent perpendiculairement l'un par rapport à l'autre. Un fluide est dit non brassé s'il s'écoule dans une veine divisé en plusieurs canaux parallèles distincts et de faible section, il est dit brassé dans le cas contraire. Le brassage a pour effet d'homogénéiser la température dans la section droite de la veine. Les échangeurs de chaleur à courants croisés sont surtout utilisés pour des échanges entre un gaz circulant dans la calandre et un liquide circulant dans les tubes.

On les appelle des récupérateurs de chaleur, c'est le cas de la récupération de la chaleur des fumées avant le rejet dans l'atmosphère.

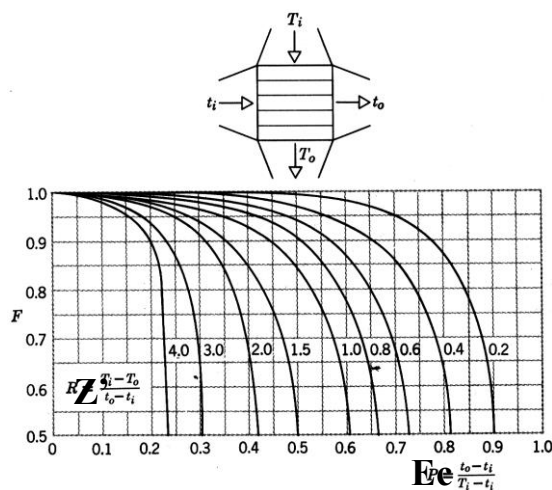


On utilise souvent des abaques donnant un coefficient correctif F tel que :

$$\phi = U S(\Delta\theta)_m F$$



Echangeur à courants croisés  
- 2 fluides brassés



Echangeur à courants croisés  
1 fluide brassé et 1 fluide non brassé

$$F = f(z', Ec)$$

#### 4°) Nombre d'unité de transfert (NUT)

**NUT**: rapport adimensionnel ;  $\phi = qc (\theta_1 - \theta_2) = US(\Delta\theta)_m$

$$\text{Donc } \frac{US}{qc} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{(\Delta\theta)_m}$$

Nous avons vu que les performances d'un échangeur dépendent de l'abaissement de la température ( $\theta_1 - \theta_2$ ) ou de l'élévation ( $\theta'_2 - \theta'_1$ ). On a démontré aussi que la (DTLM ou  $(\Delta\theta)_m$ ) moyenne logarithmique des différences de température n'a pas la même valeur pour les deux modes de fonctionnement à savoir le co-courant ou le contre courant.

Le **NUT** nous rend compte des performances d'un échangeur, mais pas le rapport :  $\frac{US}{qc}$  qui caractérise les propriétés physiques du fluide et de l'échangeur.

Pour un U, S et qc donnés nous ne sommes pas renseignés sur les performances d'un échangeur de chaleur. Mais on va voir que le **NUT** peut nous renseigner.

##### 4.1°) Echangeur fonctionnant à contre-courant

Le fluide chaud commande le transfert ( $qc < q'c$ )

$$\text{Nous avons défini : } Er = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_1 - \theta'_1} \text{ et } z = \frac{\theta'_2 - \theta'_1}{\theta_1 - \theta_2} = qc/q'c$$

$$\text{En posant } \theta_1 - \theta'_1 = \Delta\theta_{\max}$$

$$\text{Et avec } \theta_1 - \theta_2 = \theta_1 - \theta'_1 + \theta'_1 - \theta_2 = \Delta\theta_{\max} - \Delta\theta_s$$

$$\text{Alors : } \theta_1 - \theta_2 = \Delta\theta_{\max} - \Delta\theta_s \quad \text{ou} \quad \Delta\theta_s = \Delta\theta_{\max} - \Delta\theta_{\max} \cdot Er$$

$$\text{Donc } \Delta\theta_s = \Delta\theta_{\max} (1 - Er)$$

$$\text{D'autre part : } \Delta\theta_e = \theta_1 - \theta'_2 = \theta_1 - \theta'_1 + \theta'_1 - \theta'_2 = \Delta\theta_{\max} - z (\theta_1 - \theta_2) \quad (z = \frac{\theta'_2 - \theta'_1}{\theta_1 - \theta_2})$$

$$\Delta\theta_e = \Delta\theta_{\max} - z Er \Delta\theta_{\max} = \Delta\theta_{\max} (1 - z Er)$$

$$\text{Donc : } \Delta\theta_e = \Delta\theta_{\max} (1 - z Er)$$

$$\text{On a } \frac{US}{qc} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\Delta\theta_s - \Delta\theta_e} \ln \frac{\Delta\theta_s}{\Delta\theta_e} = \frac{Er \Delta\theta_{\max}}{\Delta\theta_{\max} (1 - Er) - \Delta\theta_{\max} (1 - z Er)} \ln \frac{\Delta\theta_{\max} (1 - Er)}{\Delta\theta_{\max} (1 - z Er)}$$

$$\text{Ce qui donne : } \frac{US}{qc} = \text{NUT} = \frac{1}{z-1} \ln \frac{1 - Er}{1 - z Er}$$

$$\text{NUT} = \frac{1}{1-z} \ln \frac{1 - zEr}{1 - Er}$$

Si le fluide froid commande le transfert ( $q'c < qc$ ) :

$$\text{On de même : } \frac{US}{q'c} = \text{NUT} = \frac{1}{1-z'} \ln \frac{1 - z'Ec}{1 - Ec} \quad \text{avec } z' = 1/z \text{ et } Ec = \frac{(\theta'_2 - \theta'_1)}{\theta_1 - \theta'_1}$$

$$\text{On peut écrire une formule unique : } \frac{US}{(qc)} = \text{NUT} = \frac{1}{1-z} \ln \frac{1 - zE}{1 - E}$$

Avec :

$(qc)$  : est la plus faible valeur de  $qc$  et  $q'c$

$Z$  : est la valeur du rapport  $qc/q'c$  ou  $q'c/qc$  inférieur à 1

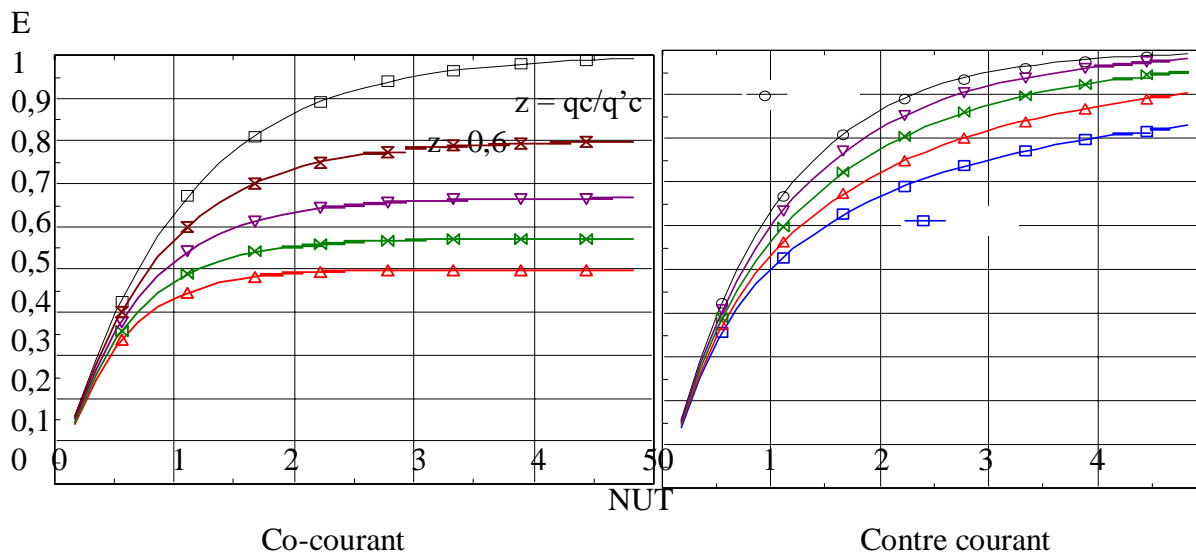
$E$  : rapport de l'écart de température (abaissement ou accroissement) du fluide qui commande le transfert à l'écart des températures initiales des deux fluides.

#### 4.2\*) Echangeur fonctionnant à co-courant

De la même façon on aura:  $\frac{US}{(qc)} = NUT = \frac{1}{1-z} \ln \frac{1}{1-E(1+z)}$

Sur les graphiques ci-dessous on peut conclure que :

- Pour une même valeur de  $z$  et  $NUT$  l'écoulement à contre courant est plus efficace que l'écoulement à co-courant. (Exemple ;  $NUT= 3$ ,  $z=0,6$  ;  $E= 0,79$  pour le co-courant et  $E= 0,91$ )
- On voit de même que l'efficacité croit fortement avec le  $NUT$  dans l'écoulement à contre courant, elle arrive très vite à une limite dans l'écoulement à co-courant.





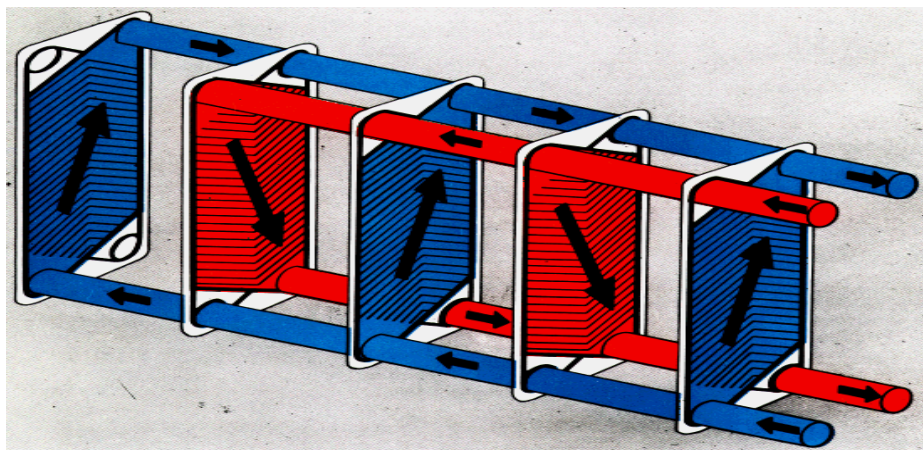
### 5°) Echangeurs de chaleur à plaques

Ces échangeurs sont utilisés dans souvent dans les industries agro-alimentaires depuis des années, mais leur développement dans le bâtiment est plus récent. Ils se distinguent par une compacité remarquable due en partie à leur coefficient  $U$  élevé, une grande facilité de nettoyage et la possibilité d'ajuster leur surface à la demande.

Cet échangeur est constitué par un ensemble de plaques embouties équipées de joints et maintenues serrées entre 2 plateaux reliés par des tirants de serrages.

Les plaques sont en général en forme de chevron pour augmenter la turbulence et ménager des points d'appuis pour résister à la pression. Leur faible épaisseur permet d'utiliser des matériaux de bonne qualité ayant une bonne tenue à la corrosion (acier inox, titane, etc.).

Les joints en polymères assurent un double rôle : l'étanchéité et la répartition des fluides dans l'échangeur. <https://www.youtube.com/watch?v=Jv5p7o-7Pms>



Principe de fonctionnement d'un échangeur à plaques

## 6°) TD SERIE 7

**VII.1°)** Déterminez pour chacun des cas suivants la surface d'échange nécessaire pour refroidir en continue 30000 Kg/h d'une solution de 66 °C à 39 °C en utilisant 29500 Kg/h d'eau de refroidissement à une température de 12 °C :

- a°) Ecoulement à co-courant
- b°) Ecoulement à contre-courant
- c°) Ecoulement à courant type 1-2
- d°) Ecoulement à courant type 2-4
- e°) Ecoulement à courant croisé

Données

$C_p(\text{solution}) = 0,9 \text{ Kcal/kg.}^\circ\text{C}$

$C_p(\text{eau}) = 1 \text{ Kcal/kg.}^\circ\text{C}$

Coefficient global de transfert de chaleur:  $U = 2100 \text{ Kcal/h.}^\circ\text{C.m}^2$

**VII.2°)** De l'acide sulfurique circule avec une vitesse de 0,8 m/s dans le tube central d'un échangeur de chaleur tubulaire de diamètre intérieur de 18 mm.

- a°) sachant que la température de l'acide sulfurique passe de 85 à 21 °C, déterminez le flux de chaleur cédé à l'eau de refroidissement.
- b°) l'eau de refroidissement entre à 10 °C et sort à 15 °C. Déterminez la longueur d'échange (dans les deux types de fonctionnement).

Données :

$\rho(\text{H}_2\text{SO}_4) = 1840 \text{ Kg /m}^3$        $C_p(\text{H}_2\text{SO}_4) = 0,36 \text{ Kcal / Kg.}^\circ\text{C}$

Coefficient global de transfert de chaleur  $U_i = 700 \text{ Kcal / h.}^\circ\text{C.m}^2$

**VII.3°)** Une solution a été utilisée en phase vapeur pour un chauffage à haute température et on se propose d'utiliser le condensât qui est à 200 °C pour chauffer du nitrobenzène de 18 °C à 80 °C dans un échangeur de chaleur tubulaire.

- a°) Sachant qu'on veut récupérer la solution à 100 °C pour une utilisation dans un troisième circuit, quel doit être le débit du nitrobenzène ?
- b°) Dans les conditions d'un fonctionnement à contre-courant est-il préférable (en considérant uniquement le point de vue économique relatif à la surface d'échange nécessaire) de faire circuler le fluide de chauffage à l'intérieur du tube central ou dans l'espace annulaire des deux tubes ?

Données :

Solution :

$\rho = 950 \text{ kg/m}^3$ ;  $\eta = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$ ,  $\lambda = 0,105 \text{ Kcal/m.h.}^\circ\text{C}$ ;  $C_p = 0,46 \text{ Kcal/kg.}^\circ\text{C}$ ;  $q_m = 1500 \text{ Kg/h}$

Nitrobenzène :

$$\rho = 1200 \text{ kg/m}^3; \eta = 10^{-3} \text{ Pl}, \lambda = 0,137 \text{ Kcal/m.h.}^\circ\text{C}; C_p = 0,33 \text{ Kcal/kg.}^\circ\text{C}$$

Echangeur :

2 tubes métalliques de diamètres respectifs : 25/33 ; 50/60 ;  $\lambda = 40 \text{ Kcal/m.h.}^\circ\text{C}$

**VII.4°)** Par circulation dans un tube d'acier entouré de vapeur se condensant à  $104^\circ\text{C}$  une huile est portée de  $18^\circ\text{C}$  à  $28^\circ\text{C}$ .

**a°)** Calculez le coefficient de transfert de chaleur  $U_e$  (externe)

**b°)** En déduire le coefficient de convection  $h_i$  relatif au film interne

**c°)** Déterminez la température de la paroi interne du tube

**d°)** Calculez  $h_i$  par la formule empirique adéquate

**e°)** Comparez  $h_i$  trouver en **b°** et **d°**.

Données

Tube : 12,5/16 ; longueur = 2,4 m ; conductivité = 40 en MKH

Huile :  $C_p = 0,5 \text{ Kcal/kg.}^\circ\text{C}$  ; conductivité = 0,12 en MKH ; débit = 270 Kg/h

Coefficient de convection de la vapeur  $h_e = 5000 \text{ Kcal/h.}^\circ\text{C.m}^2$

|                              |    |    |    |      |    |      |    |    |     |
|------------------------------|----|----|----|------|----|------|----|----|-----|
| T(°C)                        | 20 | 27 | 32 | 38   | 43 | 49   | 54 | 60 | 104 |
| $\eta \cdot 10^{-3}$<br>(Pl) | 23 | 20 | 18 | 16,2 | 15 | 13,5 | 12 | 11 | 3,6 |

**VII.5°)** Une vapeur sèche saturée circulant à l'intérieur de tubes doit assurer par condensation à  $108^\circ\text{C}$

le chauffage de 6000 Kg/h de benzène de  $20^\circ\text{C}$  à  $75^\circ\text{C}$ . La chaleur spécifique du benzène est égale à  $0,44 \text{ Kcal/Kg.}^\circ\text{C}$ .

**a°)** La détermination du coefficient global de transfert de chaleur à l'entrée et à la sortie du condenseur donne respectivement :  $U_e = 120 \text{ Kcal/h.m}^2.^\circ\text{C}$  ;  $U_s = 380 \text{ Kcal/h.m}^2.^\circ\text{C}$

Calculez la surface d'échange nécessaire

**b°)** Le coefficient global de transfert de chaleur  $U$  entre la vapeur et le benzène varie en fait avec la température selon le tableau suivant :

|                    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|--------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Température        | 20  | 25  | 30  | 35  | 40  | 45  | 50  | 55  | 60  | 65  | 70  | 75  |
| Coefficient global | 120 | 158 | 196 | 234 | 256 | 276 | 296 | 318 | 332 | 350 | 364 | 380 |

Déterminez la surface d'échange nécessaire

En admettant cette 2<sup>ème</sup> valeur comme plus correcte, quel écart (en %) représente l'application utilisée en a°).

**VII.6°)** Du benzène, à la température de 70°C, circule avec un débit de 3000 Kg/h dans un échangeur tubulaire simple où il va être refroidi par l'eau qui entre à 15 °C avec un débit de 2000 Kg/h.

**6.1°) Fonctionnement à co-courant**

**a°)** Déterminez la température limite  $\theta_{lim}$  que l'on obtiendrait avec un échangeur de surface infinie.

**b°)** En s'imposant une température de sortie du benzène de 37 °C, déterminez la température de sortie de l'eau ainsi que la surface d'échange nécessaire.

**c°)** Calculez l'efficacité de refroidissement  $\eta_r$

**6.2°) Fonctionnement à contre-courant**

**a°)** Pour les mêmes conditions de température, déterminez la surface d'échange nécessaire.

**b°)** Calculez l'efficacité de refroidissement  $\eta_r$

Données:  $C_p$  (benzène) = 0,44 Kcal/Kg.°C.  $C_p$  (eau) = 1 Kcal/Kg.°C.

$$U = 750 \text{ Kcal/h.m}^2.\text{°C}$$

**VII.7°)** On veut réchauffer 2,83 Kg/s de fuel lourd de 15 à 50 °C dans un échangeur de chaleur à faisceaux complexes en tubes de type 2-n. Ces tubes sont formés de tronçons de 2,15 m de longueur et de 40 mm de diamètre intérieur. Ils sont chauffés extérieurement par l'eau qui entre à 85 °C et sort à 36 °C. La vitesse de du fuel sera de 0,3 m/s.

a°- Peut-on opérer à contre- courant et à co-courant ?

b°- Quel nombre de tubes comporte cet échangeur ?

c°- Déterminez la surface d'échange nécessaire pour ce transfert.

d°- Quel sera le nombre de passes côté tube (n) qu'il faudra adopter ?

e°- Pourquoi un plus grand nombre de passes est favorable ?

f°- Calculez l'efficacité de refroidissement de cet échangeur.

g°- Représentez schématiquement cet échangeur de chaleur du type 2-n.

Données:  $\rho = 940 \text{ Kg/m}^3$   $c_p = 1880 \text{ J/Kg.°C}$   $U_i = 750 \text{ Kcal / h.°C.m}^2$



**VII.8\*)** Un échangeur de chaleur est constitué d'un nombre de tubes métalliques de 25 mm de diamètre extérieur et de 2,5 mm d'épaisseur. L'eau s'écoulant à 0,6 m/s entre dans les tubes à 17 °C et doit être chauffée à 37 °C par un hydrocarbure se condensant autour des tubes à 72 °C avec un débit de 1,25 Kg/s.

**a\*)** Calculez la longueur de chaque tube et le nombre de tube nécessaire pour le chauffage de l'eau. Les coefficients superficiels à l'intérieur et à l'extérieur des tubes valent respectivement 1400 et 800 Kcal/h.°C.m<sup>2</sup>. On néglige la résistance de la paroi tube.

Chaleur latente de condensation de l'hydrocarbure = 18,7 Kcal/Kg

$$\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ Kg/m}^3$$

$$C_{p_{\text{eau}}} = 1 \text{ Kcal/ Kg. } ^\circ\text{C}$$

**VII.9\*)** Un échangeur de chaleur de type **2-n** est constitué d'un certain nombre de tubes métalliques de 25 mm de diamètre extérieur et de 2,5 mm d'épaisseur. L'eau s'écoulant à 0,6 m/s entre à l'intérieur des tubes à 17 °C est chauffée à 37 °C par un hydrocarbure qui entre à 72 °C et sort à 44 °C avec un débit calorifique de 3000 Kcal / h. °C.

a°- peut-on opérer à contre- courant et à co-courant ?

b°- calculez le débit volumique de l'eau (m<sup>3</sup>/ h )

c°- calculez la longueur de chaque tube de cet échangeur

d°- les tubes sont disponibles par longueur de 2,2 m. Quel nombre de passes doit-on prévoir ?

e°-pourquoi un plus grand nombre de passes est favorable ?

f°-représentez schématiquement cet échangeur de chaleur du type 2-n.

Données:  $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ Kg / m}^3$

$c_{p_{\text{eau}}} = 1 \text{ Kcal / Kg.}^\circ\text{C}$

conductivité thermique des tubes  $\lambda = 40 \text{ Kcal / h.m.}^\circ\text{C}$

coefficient superficiel d'échange de chaleur à l'intérieur  $h_i = 1400 \text{ Kcal / h.}^\circ\text{C.m}^2$

coefficient superficiel d'échange de chaleur à l'extérieur  $h_e = 800 \text{ Kcal / h.}^\circ\text{C.m}^2$

**VII.10\*)** On veut réchauffer 57 Kg/s de fuel lourd ( $\rho=940 \text{ Kg/m}^3$ ,  $C_p=1880 \text{ J/Kg.}^\circ\text{C}$ ) de 15 à 50 °C dans un échangeur de chaleur tubulaire à faisceaux complexes de type 2-n. Ces tubes sont formés de tronçons de 5,4 m de longueur et de 40 mm de diamètre intérieur. Ils sont chauffés extérieurement par l'eau qui entre à 85 °C et sort à 36 °C. La vitesse du fuel est égale à 1,5m/s. Le coefficient global de transfert de chaleur rapporté à la surface interne est égale à 870,84 w.m<sup>-2</sup>.°C<sup>-1</sup>.

a- Peut-on opérer à contre- courant et à co-courant ?

b- Quel nombre de tubes comporte cet échangeur ?

c- Déterminez la surface d'échange nécessaire pour ce transfert.

- d- Quel sera le nombre de passes côté tube (n) qu'il faudra adopter ?  
 e- Pourquoi un plus grand nombre de passes est-il favorable ?  
 f- Calculez l'efficacité de refroidissement de cet échangeur.  
 g- Représentez schématiquement cet échangeur de chaleur du type 2-n.

### VII.1°)

Température de sortie de l'eau :  $q_v \cdot c_p \cdot \rho = q_c$

$$q_m \cdot c_p (\theta_1 - \theta_2) = q' m c_p (\theta'2 - \theta'1) = 30000 \cdot 0,9 (66 - 39) = 29500 \cdot 1 (\theta'2 - 12)$$

$$\theta'2 = 36,7 \text{ °C}$$

$$\begin{array}{l}
 a^*) \quad 66 \longrightarrow 39 \quad \Delta\theta_e = 66 - 12 \quad \text{et} \quad \Delta\theta_s = 39 - 36,7 \\
 \quad \quad 12 \longrightarrow 36,7 \quad (\Delta\theta)_m = \frac{(39-36,7) - (66-12)}{\ln \frac{(39-36,7)}{(66-12)}} = 16,38^\circ\text{C}
 \end{array}$$

$$\phi = US(\Delta\theta)_m \quad S = \frac{30000 \cdot 0,9 (66 - 39)}{2100 \cdot 16,38} = 21,19 \text{ m}^2$$

$$(S = \pi DL ; L = S / \pi D = 374,9 \text{ m}, \text{ avec } D = 18 \text{ mm})$$

$$\begin{array}{l}
 b^*) \quad 66 \longrightarrow 39 \quad \Delta\theta_e = 66 - 36,7 \quad \text{et} \quad \Delta\theta_s = 39 - 12 \\
 \quad \quad 36,7 \longleftarrow 12 \quad (\Delta\theta)_m = \frac{(39-12) - (66-36,7)}{\ln \frac{(39-12)}{(66-36,7)}} = 28,15^\circ\text{C}
 \end{array}$$

$$\phi = US(\Delta\theta)_m \quad S = \frac{30000 \cdot 0,9 (66 - 39)}{2100 \cdot 28,15} = 12,33 \text{ m}^2$$

$$(S = \pi DL \quad L = S / \pi D = 218,15 \text{ m}, \text{ avec } D = 18 \text{ mm})$$

$$c^*) \text{ Ecoulement 1-2} \quad \phi = US(\Delta\theta)_m \cdot F \quad S = \phi / U(\Delta\theta)_m \cdot F$$

$$F = f(z' ; E_c) = 0,85$$

$$E_c = \frac{\theta'2 - \theta'1}{\theta_1 - \theta'1} = \frac{36,7 - 12}{66 - 12} = 0,457$$

$$z' = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta'2 - \theta'1} = \frac{66 - 39}{36,7 - 12} = 1,09$$

$$F = f(1,09 ; 0,457) = 0,85$$

$$S = \frac{30000 \cdot 0,9 (66 - 39)}{2100 \cdot 28,15 \cdot 0,85} = 14,5 \text{ m}^2$$

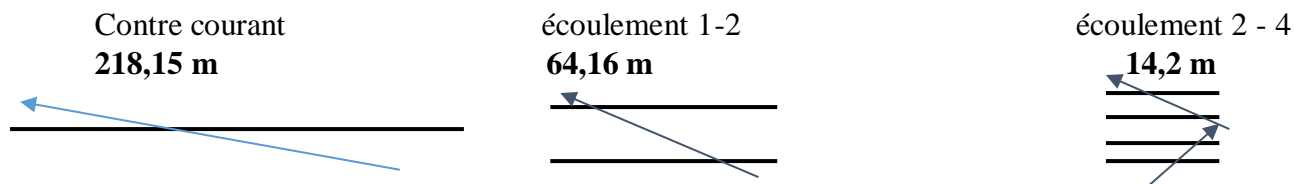
$$(S = \pi DL \quad L = S / \pi D = 128,33 / 2 = 64,16 \text{ m}, \text{ avec } D = 18 \text{ mm})$$

$$d^*) \text{ Ecoulement 2-4} \quad \phi = US(\Delta\theta)_m \cdot F \quad S = \phi / U(\Delta\theta)_m \cdot F$$

$$F = f(1,09 ; 0,457) = 0,96$$

$$S = \frac{30000 \cdot 0,9 (66 - 39)}{2100 \cdot 28,15 \cdot 0,96} = 12,84 \text{ m}^2$$

$$(S = \pi DL \quad L = S / \pi D = 56,8/4 = 14,2 \text{ m, avec } D = 18 \text{ mm})$$



Meilleur est le 2 - 4 : augmenté la surface de contact et réduire l'encombrement

### VII.2\*)

a\*) Le flux de chaleur cédé à l'eau de refroidissement:

$$\phi = qv \cdot \rho \cdot cp(\theta_1 - \theta_2)$$

$$qv = v \cdot \pi D^2 / 4$$

$$\phi = 0,8 \cdot \pi \cdot (18 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 1840 \cdot 0,36 \cdot (85 - 21) / 4 = 8,626 \text{ Kcal/s} = 31053,28 \text{ Kcal/h}$$

b\*) dans les deux types de fonctionnement  $\phi = U_i S_i (\Delta\theta)_m$  don  $S_i = \pi DL = \phi / U_i (\Delta\theta)_m$

$$L = \phi / \pi D U_i (\Delta\theta)_m$$

Co-courant

$$85 \longrightarrow 21$$

$$\Delta\theta_e = 85 - 10 \quad \text{et} \quad \Delta\theta_s = 21 - 15$$

$$10 \longrightarrow 15$$

$$(\Delta\theta)_m = \frac{(85 - 10) - (21 - 15)}{\ln \frac{(85 - 10)}{(21 - 15)}} = 27,32 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$L = 31053,28 / \pi \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 700 \cdot 27,32 = 28,73 \text{ m}$$

Contre-courant

$$85 \longrightarrow 21$$

$$\Delta\theta_e = 85 - 15 \quad \text{et} \quad \Delta\theta_s = 21 - 10$$

$$15 \longleftarrow 10$$

$$(\Delta\theta)_m = \frac{(85 - 15) - (21 - 10)}{\ln \frac{(85 - 15)}{(21 - 10)}} = 31,88 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$L = 31053,28 / \pi \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 700 \cdot 31,88 = 24,62 \text{ m}$$

**VII.3\*****a\***) Calcul du débit de nitrobenzène

$$q_m \cdot c_p(\theta_1 - \theta_2) = q' m c_p'(\theta_2' - \theta_1') = 1500 \cdot 0,46 (200 - 100) = q' m \cdot 0,33(80 - 18)$$

$$q' m = 3372,4 \text{ Kg/h}$$

$$\mathbf{b^*)} \quad \phi = U_e S_e (\Delta\theta)_m \quad S_e = \phi / U_e (\Delta\theta)_m$$

$$\phi = q_m \cdot c_p(\theta_1 - \theta_2) = 1500 \cdot 0,46 (200 - 100) = 69000 \text{ kcal/h}$$

$$200 \quad \longrightarrow \quad 100 \quad \Delta\theta_e = 200 - 80 \quad \text{et} \quad \Delta\theta_s = 100 - 18$$

$$80 \quad \longleftarrow \quad 18 \quad (\Delta\theta)_m = \frac{(100-18) - (200-80)}{\ln\left(\frac{100-18}{200-80}\right)} = 99,8^\circ\text{C}$$

$$\frac{1}{U_e} = \frac{D_2}{D_1 \cdot h_i} + \frac{D_2 \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\lambda} + \frac{1}{h_e}$$

Il faut calculer  $U_e$  selon la circulation des deux fluides :**b-1\***) le nitrobenzène circule dans le tube central et la solution dans l'espace annulaire:  $S_e$ **b-2\***) la solution circule dans le tube central et le nitrobenzène dans l'espace annulaire:  $S'_e$ **b-1\***) le nitrobenzène circule dans le tube central et la solution dans l'espace annulaire

$$\frac{1}{U_e} = \frac{D_2}{D_1 \cdot h_i} + \frac{D_2 \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\lambda} + \frac{1}{h_e}$$

 $h_i = ?$ 

$$Re = \rho v D_i / \eta = 4q' m / \pi \eta D_i = 4 \cdot 3372,4 / \pi \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 = 47733,9$$

Régime turbulent et le fluide se chauffe :  $Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4}$ 

$$Pr = 8,67$$

$$Nu = 301,67 = h_i D_i / \lambda \quad h_i = 301,67 \cdot 0,137 / 25 \cdot 10^{-3} = 1653,2 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}$$

 $h_e = ?$ 

$$Re = \rho v D_{eq} / \eta = 4q' m / \pi \eta D_2$$

$$\text{Avec } D_{eq} = (D_3^2 - D_2^2) / D_2 = ((50 \cdot 10^{-3})^2 - (33 \cdot 10^{-3})^2) / 33 \cdot 10^{-3} = 42,76 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$v = 4q' m / \pi (D_3^2 - D_2^2)$$

$$Re = 4q' m / \pi \eta D_2 = 4 \cdot 1500 / \pi \cdot 0,6 \cdot 10^{-3} \cdot 33 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 = 26807,35$$

Régime turbulent et le fluide se refroidit :  $Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,3}$ 

$$Pr = 3600 \cdot 0,46 \cdot 0,6 \cdot 10^{-3} / 0,105 = 9,46$$

$$\text{Nu} = 157,43 = h_e \text{Deq} / \lambda \quad h_e = 157,43 \cdot 0,105 / 42,76 \cdot 10^{-3} = 386,58 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}$$

$$\frac{1}{Ue} = \frac{D_2}{D_1 \cdot h_i} + \frac{D_2 \ln \frac{D_2}{D_1}}{2\lambda} + \frac{1}{h_e} = \frac{33}{25 \cdot 1653,2} + \frac{33 \cdot 10^{-3} \ln \frac{33}{25}}{2 \cdot 40} + \frac{1}{386,58}$$

$$Ue = 285,73 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}$$

$$S_e = \phi / U(\Delta\theta)_m = 69000 / 285,73 \cdot 99,8 = 2,42 \text{ m}^2$$

$$S_e = 2,42 \text{ m}^2$$

**b-2°)** la solution circule dans le tube central et le nitrobenzène dans l'espace annulaire

$$\frac{1}{Ue} = \frac{D_2}{D_1 \cdot h_i} + \frac{D_2 \ln \frac{D_2}{D_1}}{2\lambda} + \frac{1}{h_e}$$

$$h_i = ?$$

$$\text{Re} = \rho v D_i / \eta = 4q_m / \pi \eta D_i = 4 \cdot 1500 / \pi \cdot 0,610 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 = 35385,7$$

$$\text{Régime turbulent et le fluide se refroidit : Nu} = 0,023 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,3}$$

$$\text{Pr} = 9,46$$

$$\text{Nu} = 196,587 = h_i D_i / \lambda \quad h_i = 196,587 \cdot 0,105 / 25 \cdot 10^{-3} = 825,67 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}$$

$$h_e = ?$$

$$\text{Re} = \rho v \text{Deq} / \eta = 4q'_m / \pi \eta D_2$$

$$\text{Avec Deq} = (D_3^2 - D_2^2) / D_2 = ((50 \cdot 10^{-3})^2 - (33 \cdot 10^{-3})^2) / 33 \cdot 10^{-3} = 42,76 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$v = 4q_m / \pi (D_3^2 - D_2^2)$$

$$\text{Re} = 4q_m / \pi \eta D_2 = 4 \cdot 3372,4 / \pi \cdot 10^{-3} \cdot 33 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 = 36162,05$$

$$\text{Régime turbulent et le fluide se chauffe : Nu} = 0,023 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,4}$$

$$\text{Pr} = 8,67$$

$$\text{Nu} = 241,85 = h_e \text{Deq} / \lambda \quad h_e = 241,85 \cdot 0,137 / 42,76 \cdot 10^{-3} = 774,87 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}$$

$$\frac{1}{Ue} = \frac{D_2}{D_1 \cdot h_i} + \frac{D_2 \ln \frac{D_2}{D_1}}{2\lambda} + \frac{1}{h_e} = \frac{33}{25 \cdot 825,67} + \frac{33 \cdot 10^{-3} \ln \frac{33}{25}}{2 \cdot 40} + \frac{1}{774,87}$$

$$Ue = 332,92 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}$$

$$S'_e = \phi / U(\Delta\theta)_m = 69000 / 332,92 \cdot 99,8 = 2,07 \text{ m}^2$$

$$S'_e = 2,07 \text{ m}^2$$

$$100 \cdot (S_e - S'_e) / S'_e$$

$$100 \cdot (2,42 - 2,07) / 2,07 = 16,91\%$$

**Donc un gain en surface de 16,91% si on fait circuler le fluide chaud dans le tube central.**

## VII.4°)

$$a^{\circ}) \phi = UeSe(\Delta\theta)_m = qm.cp.(\theta'_2 - \theta'_1) = 270.0,5.(28 - 48) = \mathbf{1350 \text{ Kcal/h}}$$

$$104^{\circ}\text{C} \longrightarrow 104^{\circ}\text{C} \quad (\Delta\theta)_m \text{ est la même pour le co et le contrecourant}$$

$$18^{\circ}\text{C} \longrightarrow 28^{\circ}\text{C} \quad \text{dans le cas de la condensation :}$$

$$(\Delta\theta)_m = \ln \frac{(104-28) - (104-18)}{\frac{(104-28)}{(104-18)}} = \mathbf{80,9^{\circ}\text{C}}$$

$$S = \pi DL = \pi.16.10^{-3}.2,4 = \mathbf{0,1206 \text{ m}^2}$$

$$\text{Donc } Ue = \phi / (\Delta\theta)_m.Se = 1350 / 80,9. 0,1206 = \mathbf{138,37 \text{ Kcal/hm}^2.\text{^{\circ}C}}$$

## b°) h interne (hi)

$$\frac{1}{Ue} = \frac{De}{hiDi} + \frac{De \ln \frac{De}{Di}}{2\lambda} + \frac{1}{he} : \quad \mathbf{hi = 183,43 \text{ Kcal/hm}^2.\text{^{\circ}C}}$$

$$c^{\circ}) \phi = \Delta\theta / (Rt + Rf)$$

$$Rt = \ln\left(\frac{De}{Di}\right) / 2\pi\lambda L = 4,1.10^{-4} \text{ h}^{\circ}\text{C/Kcal}$$

$$Rf = 1/he.\pi DeL = 1/5000.\pi.16.10^{-3}.2,4 = 16,59.10^{-4} \text{ h}^{\circ}\text{C/Kcal}$$

$$\Delta\theta = 104 - \theta_p = \phi .(Rt + Rf) \quad \text{donc: } \mathbf{\theta_p = 101,2^{\circ}\text{C}}$$

## d°) hi ?

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho v Di}{\eta} = \frac{4qm}{\pi\eta Di} = 4.270/\pi. \mathbf{21,7.10^{-3}}.12,5.10^{-3} .3600 = \mathbf{352}$$

$$\mathbf{Re} = 352 < 2100 : \quad \text{régime laminaire}$$

$$\eta = \mathbf{21,7.10^{-3}} : \text{ Viscosité moyenne entre } 18 \text{ et } 28^{\circ}\text{C} \quad \theta'_m = (28 + 18)/2 = 23^{\circ}\text{C}$$

$$\mathbf{Nu} = 1,86 (\text{Re.Pr.}(D/L))^{1/3} .(\eta/\eta_p)^{0,14}$$

$$\eta_p = \eta_{101,2^{\circ}\text{C}} = 3,65.10^{-3} \text{ Pl}$$

$$\mathbf{Nu} = 20,1 = hiD/\lambda : \quad \mathbf{hi = 193 \text{ Kcal/hm}^2.\text{^{\circ}C}}$$

$$e^{\circ}) \text{ Comparez hi trouver en b}^{\circ} (\mathbf{hi} = 183,43 \text{ Kcal/hm}^2.\text{^{\circ}C}) \text{ et d}^{\circ} (\mathbf{hi} = 193 \text{ Kcal/hm}^2.\text{^{\circ}C})$$

$$\frac{\Delta hi}{hi} = \mathbf{4,89 \%}$$

*Ecart < à 5%, donc la formule empirique reste valable*

## VII.5°)

a\*) *Surface d'échange nécessaire:*

$$\phi = S(U\Delta\theta)_m \quad S = \phi / (U\Delta\theta)_m \quad \phi = 6000 \cdot 0,44(75 - 25) = 145200 \text{ Kcal/h}$$

Cas où le coefficient global de transfert thermique varie linéairement avec la température

$$20 \longrightarrow 75 \quad (\Delta\theta)_e = 108 - 20 = 88 \quad \text{et} \quad (\Delta\theta)_s = 108 - 75 = 33$$

$$108 \longrightarrow 108$$

$$(U\Delta\theta)_m = \frac{U_e \Delta\theta_s - U_s \Delta\theta_e}{\ln \frac{U_e \Delta\theta}{U_s \Delta\theta}} = \frac{120 \cdot 33 - 380 \cdot 88}{\ln \frac{120 \cdot 33}{380 \cdot 88}} = 13817,61 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$S = 145200 / 13817,61 = 10,51 \text{ m}^2$$

b\*) *Il faut que le coefficient global de transfert thermique varie linéairement avec la température pour appliquer la formule suivante:  $\phi = S(U\Delta\theta)_m$*

La courbe de la température en fonction du coefficient global de transfert thermique donne 3 tronçons linéaires :

Donc on va diviser l'échangeur en trois tronçons et on calcul la surface pour chacun d'eux. A la fin on somme les trois surfaces pour avoir la surface totale qui est à comparer avec la première question.

Pour le premier tronçon: **20 - 36 °C**

$$(U\Delta\theta)_m = 13895 \text{ Kcal/hm}^2 : \quad \phi = 6000 \cdot 0,44(36 - 20) = 42240 \text{ Kcal/h}$$

$$S_1 = 42240 / 13895 = 3,04 \text{ m}^2$$

Pour le deuxième tronçon: **36 - 56 °C**

$$(U\Delta\theta)_m = 17189 \text{ Kcal/hm}^2 : \quad \phi = 6000 \cdot 0,44(56 - 36) = 52800 \text{ Kcal/h}$$

$$S_2 = 52800 / 17189 = 3,07 \text{ m}^2$$

Pour le troisième tronçon: **56 - 75 °C**

$$(U\Delta\theta)_m = 14703 \text{ Kcal/hm}^2 : \quad \phi = 6000 \cdot 0,44(75 - 56) = 50160 \text{ Kcal/h}$$

$$S_3 = 50160 / 14703 = 3,4 \text{ m}^2$$

$$S' = S_1 + S_2 + S_3 = 9,51 \text{ m}^2$$

En admettant cette 2<sup>ème</sup> valeur comme plus correcte, quel écart (en %) représente l'application utilisée en a°).

$$(S - S') \cdot 100 = (10,51 - 9,51) \cdot 100 = 10\%$$

## VII.6°)

$$6.1.a^\circ) \theta_{lim} = \theta_1 - \frac{1}{Z+1} (\theta_1 - \theta'_1) \text{ avec } Z = \frac{qc}{q'c} = \frac{3000 \cdot 0,44}{2000 \cdot 1} = 0,66$$

$$\theta_{lim} = 70 - \frac{1}{1,66} (70 - 15) = 36,9 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$6.1.b^\circ) 3000 \cdot 0,44 (70 - 37) = 2000 \cdot 1 (\theta'_2 - 15) \therefore \theta'_2 = 36,8 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$(\Delta\theta)_m = 9,8 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$S = \frac{\phi}{U(\Delta\theta)_m} = \frac{3000 \cdot 0,44 (70 - 37)}{750 \cdot 9,8} = 5,9 \text{ m}^2$$

$$6.1.c^\circ) E_r = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 - \theta_{lim}} = \frac{70 - 37}{70 - 36,9} = 0,997$$

$$6.2.a^\circ) (\Delta\theta)_m = 27,2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$S = \frac{\phi}{U(\Delta\theta)_m} = \frac{3000 \cdot 0,44 (70 - 37)}{750 \cdot 27,2} = 2,1 \text{ m}^2$$

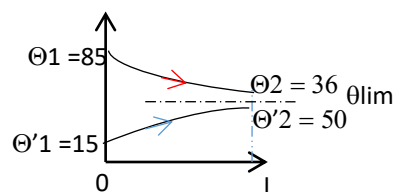
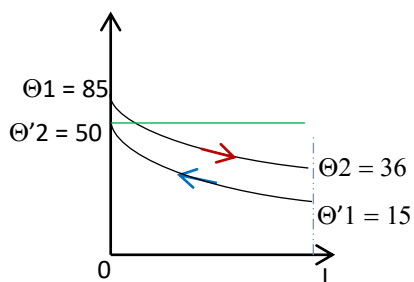
$$6.2.b^\circ) E_r = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 - \theta'_1} = \frac{70 - 37}{70 - 15} = 0,6$$

## VII.7°)

a°)

Le co-courant est impossible ( $\theta'_2 > \theta_2$ ), pour le contrecourant il est possible d'avoir  $\theta'_2 > \theta_2$

Donc on opère à contrecourant.



b°) Nombre de tube

$$q_v = n \cdot v \cdot S : n = q_v / v \cdot S$$

$$q_v = q_m / \rho = 2,83 / 940 \text{ m}^3/\text{s} ; v = 0,3 \text{ m/s} ; S = \pi D^2 / 4 = \pi (40 \cdot 10^{-3})^2 / 4$$

$$n = 4,283 / 0,3 \cdot \pi \cdot (40 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 940 = 7,99 = 8 \text{ tubes}$$



c°) *La surface d'échange nécessaire pour ce transfert.*

$$\phi = US(\Delta\theta)_m \cdot F \quad ; \quad S = \phi / U(\Delta\theta)_m \cdot F$$

$$\begin{array}{ccc} 85 \longrightarrow & 36 & (\Delta\theta)_m = 27,41 \text{ }^\circ\text{C} \\ 15 \longleftarrow & 50 & \end{array}$$

$$z' = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta'2 - \theta'1} = 1,4 \quad E_c = \frac{\theta'2 - \theta'1}{\theta_1 - \theta'1} = 0,5 \quad F = 0,9$$

$$\phi = q' \cdot m \cdot c_p (\theta'2 - \theta'2) = 2,83 \cdot 3600 \cdot (50 - 15) \cdot 1880 \cdot 10^{-3} / 4,18 = 160375,69 \text{ kcal/h}$$

$$S = \phi / U(\Delta\theta)_m \cdot F = 160375,69 / 751 \cdot 27,41 \cdot 0,9 = 8,67 \text{ m}^2$$

d°) *Nombre de passes coté tubes*

$$\text{Longueur totale : } L = S / \pi D = 8,67 / \pi \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 69,03 \text{ m}$$

$$l = L / n = 69,03 / 8 = 8,63 \text{ m ; c'est la longueur s'il y avait une seule passe}$$

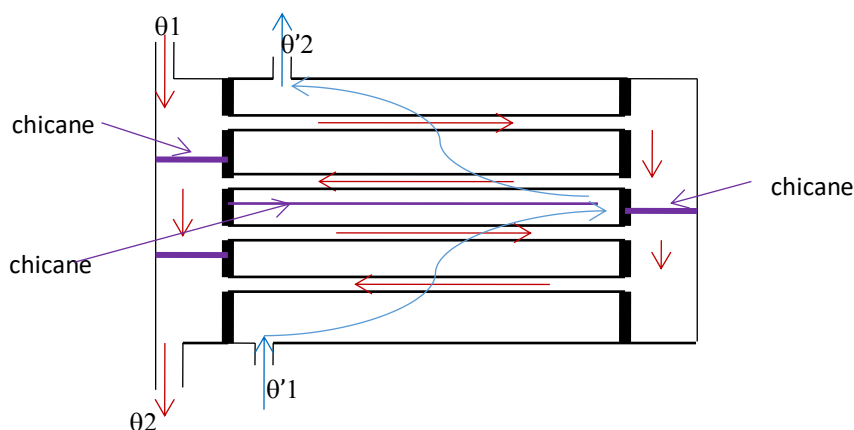
Les tronçons sont disponibles par longueur de 2,15 m

$$8,63 / 2,15 = 4 \text{ passes}$$

d°) Un plus grand nombre de passe est favorable à une augmentation de la **surface de contact** entre les deux fluides. En plus d'une augmentation de la turbulence qui engendre la **diminution** de l'épaisseur de la couche limite dynamique donc de la **résistance** au transfert thermique. La configuration de nombre important de passe permet de diminuer l'encombrement.

$$f^\circ) \text{ Er} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 - \theta'1} = 0,7 ; \quad 70\%$$

g°)



**VII.8°)**

Avant de calculer le nombre de tube il faut d'abord calculer de débit d'eau de refroidissement:

$$q'_v = nvS$$

$$\phi = q_v \rho c_p (\theta'2 - \theta'1) = L v \cdot q_m = q_v \cdot 1000 \cdot 1 = 18,7 \cdot 1,25 = 23,375 \text{ Kcal/s} \cdot 3600 = \mathbf{84150 \text{ kcal/h}} ;$$

$$q_v = 23,375 / (37 - 17) 1000 \cdot 1 = 0,00116875 \text{ m}^3/\text{s} = 4,2 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\mathbf{n = 4 \cdot q_v / v \pi D_i^2 = 4 \cdot 4,2 / 0,63,14 \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 3600 = 6 \text{ tubes}}$$

$$\phi = US(\Delta\theta)_m$$

$$72 \xrightarrow{\hspace{2cm}} 72 \quad (\Delta\theta)_m = 44,25 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$17 \xrightarrow{\hspace{2cm}} 37$$

$$\frac{1}{Ue} = \frac{D2}{D1hi} + \frac{1}{he} = 25/20 \cdot 1400 + 1/800 ; \quad \mathbf{U = 294,74 \text{ Kcal/hm}^2\text{ }^\circ\text{C}}$$

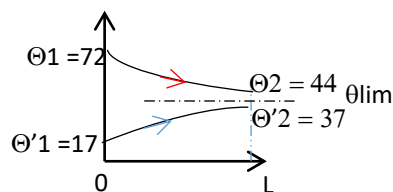
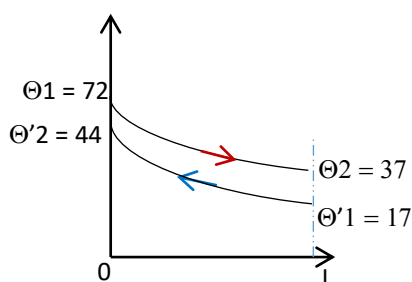
$$\mathbf{L = \phi / U(\Delta\theta)_m \cdot \pi \cdot D_e = 84150 / 294,74 \cdot 44,25 \cdot 3,14 \cdot 25 \cdot 10^{-3} = 82,19 \text{ m}}$$

Longueur totale d'échange  $L = 82,19 \text{ m}$

**Longueur de chaque tube =  $82,19/6 = 13,7 \text{ m}$**

**VII.9°)**

**a°) les deux types de fonctionnement sont possible**



**b°) Le débit volumique de l'eau (m<sup>3</sup>/h)**

$$q_c(\theta_1 - \theta_2) = q'_v \cdot \rho \cdot c_p (\theta'2 - \theta'1) = 3000(72 - 44) = q'_v \cdot 1000 \cdot 1(37 - 17) = 84000 \text{ Kcal/h}$$

$$\mathbf{q'_v = 4,2 \text{ m}^3/\text{h}}$$

**c\*) Le nombre de tube nécessaire:  $q \cdot v = n v S$**

$$n = 4q'v / \sqrt{\pi} D_i^2 = 4.4,2 / 0,6.3,14.20.10^{-3}.3600 = 6,2$$

$$\mathbf{n = 6 \text{ tubes}}$$

**d\*) La longueur de chaque tube de cet échangeur**

$$\text{La longueur totale: } \phi = \mathbf{US(\Delta\theta)_m \cdot F} = U\pi DL(\Delta\theta)_m \cdot F$$

$$L = \phi / U\pi DL(\Delta\theta)_m \cdot F$$

$$\frac{1}{U_i} = \frac{1}{h_i} + \frac{D_i \ln \frac{D_e}{D_i}}{2\lambda} + \frac{D_i}{D_e \cdot h_e} = \frac{1}{1400} + \frac{20.10^{-3} \ln \frac{25}{20}}{240} + \frac{20}{25.800}$$

$$\mathbf{U_i = 564,95 \text{ kcal/hm}^2\text{°C}}$$

$$\mathbf{(\Delta\theta)_m = 30,83 \text{ °C}}$$

$$E_c = 0,36 \quad ; \quad z' = 1,4 \quad ; \quad \mathbf{F = 0,975}$$

$$\mathbf{L = 84000 / 564,95.3,14.20.10^{-3}.30,83.0,975}$$

$$\mathbf{\text{Longueur d'échange totale: } L = 78,76}$$

$$\mathbf{\text{Longueur de chaque tube: } L/n = 78,76/6 = 13,12 \text{ m} = l}$$

**5\*) Nombre de passes:**

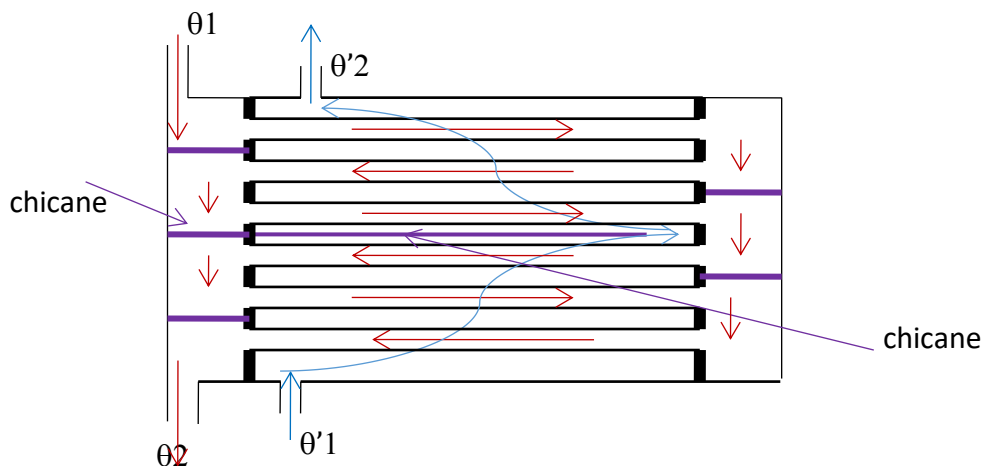
Puisque les tronçons sont disponibles par longueur de 2.2 m, on aura:

$$n_{\text{passe}} = l / 2,2 = 13,2 / 2,2 = 6$$

$$\mathbf{\text{Nombre de passe} = 6}$$

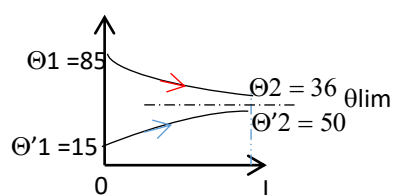
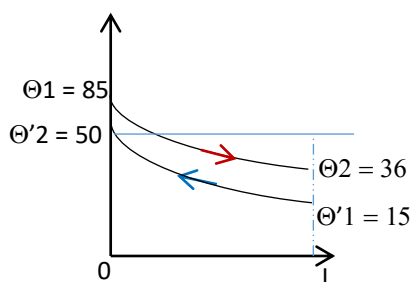
**f°)** Un plus grand nombre de passe est favorable à une augmentation de la **surface de contact** entre les deux fluides. En plus d'une augmentation de la turbulence qui engendre la **diminution** de l'épaisseur de la couche limite dynamique donc de la **résistance** au transfert thermique. La configuration du nombre important de passe permet de diminuer l'**encombrement**.

**g°)**



### VII.10°)

**a°)** Le co-courant est impossible ( $\theta_2' > \theta_2$ ), pour le contrecourant il est possible d'avoir  $\theta_2' > \theta_2$ .  
Donc on opère à contre-courant.



**b°)** Nombre de tubes que comporte cet échangeur

$$qv = nvS = qm/\rho$$

$$n = 4 \cdot qm / \sqrt{\pi} D^2 \rho = 4 \cdot 57 / 1,5 \cdot 3,14 (40 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 940 = 32$$

**n = 32 tubes**

*c\*) La surface d'échange nécessaire pour ce transfert.*

$$\phi = US(\Delta\theta)_m \cdot F ; \quad S = \phi / U(\Delta\theta)_m \cdot F$$

$$85 \longrightarrow 36 \quad (\Delta\theta)_m = 27,41 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$15 \longleftarrow 50$$

$$z' = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta'_2 - \theta'_1} = 1,4 \quad Ec = \frac{\theta'_2 - \theta'_1}{\theta_1 - \theta'_1} = 0,5 \quad F = 0,9$$

$$\phi = q' m c p' (\theta'_2 - \theta'_1) = 57.1880(50 - 15) = 3750600 \text{ w}$$

$$S = \phi / U(\Delta\theta)_m \cdot F$$

$$S = 3750600 / 870,84 \cdot 27,4 \cdot 0,9 = 174,58 \text{ m}^2$$

*d\*) Le nombre de passes côté tube (n) qu'il faudra adopter*

$$\text{Longueur totale } L = S / n \pi D = 174,58 / 32 \cdot 3,14 \cdot 10^{-3} = 1389,97 \text{ m}$$

$$l = L / n = 1389,97 / 32 = 43,43 \text{ m}$$

Tronçons de 5,4 m

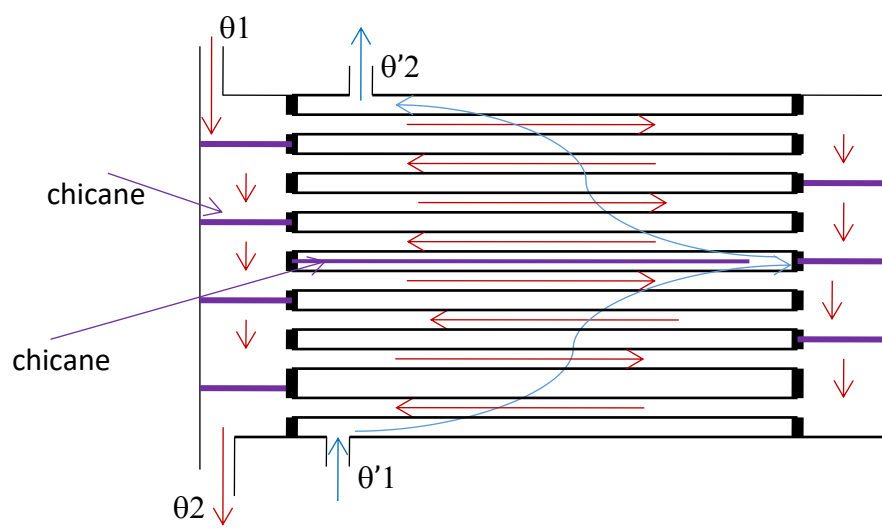
$$l / 5,4 = 43,43 / 5,4 = 8 \text{ passes}$$

**8 passes**

*e\*)* Un plus grand nombre de passe est favorable à une augmentation de la **surface de contact** entre les deux fluides. En plus d'une augmentation de la turbulence qui engendre la **diminution** de l'épaisseur de la couche limite dynamique donc de la **résistance** au transfert thermique. La configuration du nombre important de passe permet de diminuer l'**encombrement**.

*f\*) Efficacité de refroidissement de cet échangeur:*

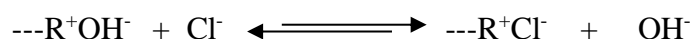
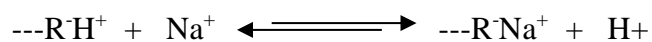
$$Er = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 - \theta'_1} = (85 - 36) / (85 - 15) = 0,7 ; \quad Er = 70\%$$

$g^\circ -$ 

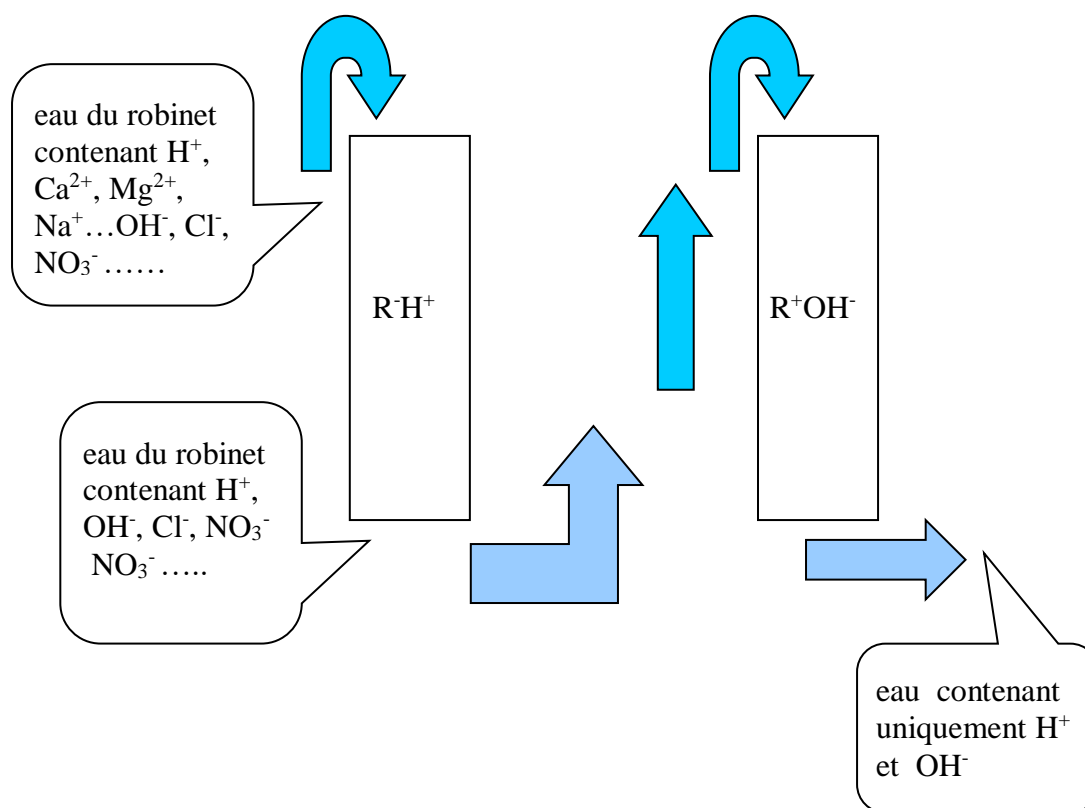
## 7°) Traitement des eaux des chaudières

### a°) Déminéralisation d'une eau de robinet

Il s'agit d'éliminer les cations et les anions d'une eau de robinet. Deux résines sont nécessaires pour cette opération. Une résine échangeuses de cations chargée négativement, Une résine échangeuses d'anions chargée positivement.



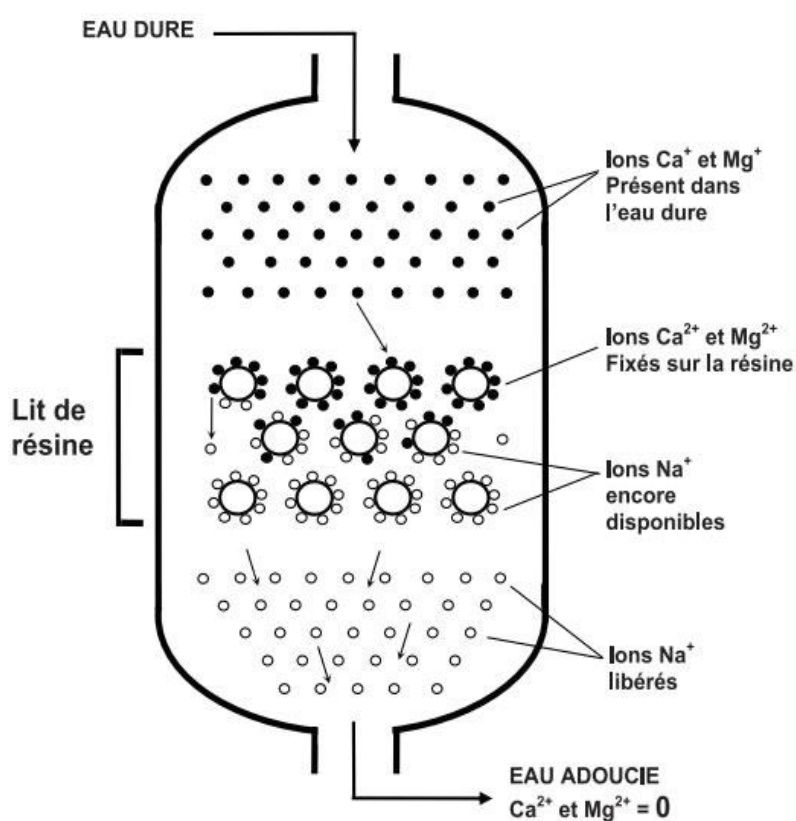
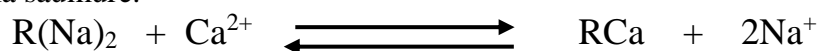
La régénération se fait par des solutions d'acide chlorhydrique et de soude caustique.



### *b\*) Permutation sodique*

L'adoucisseur est un appareil qui utilise une résine échangeuse d'ions et le principe consiste à permuter les ions calcium et magnésium qui constituent la dureté de l'eau par des ions sodium liés à la résine de l'adoucisseur. L'échange ionique d'adoucissement sera réalisé sur un support solide constitué d'une résine initialement chargée en sodium. Chaque ion  $\text{Ca}^{2+}$  et  $\text{Mg}^{2+}$  va chasser de la résine 2 ions  $\text{Na}^+$ .

L'opération d'adoucissement va se poursuivre jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'ions  $\text{Na}^+$  sur la résine. Lorsque tous les ions sodium ont été échangés, on dit que la résine est saturée et elle doit être régénérée. Il faut donc la recharger en ions sodium pour lui redonner son pouvoir adoucissant. Pour cela on va effectuer une régénération de la résine avec une saumure (solution de  $\text{NaCl}$  saturée ou chlorure de sodium). Les ions  $\text{Na}^+$  vont se fixer sur la résine, tandis que les ions  $\text{Cl}^-$  entraîneront vers l'égout les ions  $\text{Ca}^{2+}$  et  $\text{Mg}^{2+}$  qui étaient fixés sur la résine. Ainsi, les ions sodium sont de nouveau remis en place sur les résines, alors que les ions calcium et magnésium sont évacués à l'égout sous forme de chlorures. Une succession de rinçage permet d'éliminer la saumure.





## 8°) Exercices d'application relatifs à l'encrassement

1°) Un échangeur de chaleur à tubes concentriques (contrecourant) fonctionne déjà depuis longtemps. La surface d'échange mise en jeu est de  $5 \text{ m}^2$  et la valeur de dimensionnement du coefficient global de transfert thermique était de  $40 \text{ W m}^{-2}\text{C}^{-1}$ . Durant une phase de test, l'échangeur est alimenté par un débit d'huile de  $0,1 \text{ Kg/s}$  ( $c_p = 1900 \text{ J/Kg}^\circ\text{C}$ ) qui se refroidit de  $110^\circ\text{C}$  à  $66^\circ\text{C}$ . La température d'entrée de l'eau de refroidissement est de  $25^\circ\text{C}$  qui circule avec un débit de  $0,2 \text{ Kg/s}$  ( $c_p = 4180 \text{ J/Kg}^\circ\text{C}$ ). Déterminez si l'échangeur s'est encrassé et de combien ? (donnez la valeur de résistance d'encrassement).

Il faut d'abord calculer la température de sortie l'eau et la moyenne logarithmique:

$$q_m c_p (\theta_1 - \theta_2) = q'_m c'_p (\theta'_2 - \theta'_1)$$

$$0,1 \cdot 1900 (110 - 66) = 0,2 \cdot 4180 (\theta'_2 - 25) = 8360 \text{ W} ; \quad \theta'_2 = 35^\circ\text{C}$$

$$(\Delta\theta)_m = 56,29^\circ\text{C}$$

Calcul du coefficient global sale (après fonctionnement de l'échangeur un certain temps)

$$\phi = U_s \cdot S (\Delta\theta)_m ; U_s \cdot S = \phi / (\Delta\theta)_m = 8360 / 56,29 = 148,51 \text{ W/}^\circ\text{C}$$

$U_s$  coefficient global sale

Le coefficient globale propre ( $U_p$ ) est égale à  $40 \text{ W/m}^2\text{C}$ .

$$S \cdot U_p = 50 \cdot 40 = 200 \text{ W/}^\circ\text{C} ; \frac{1}{S \cdot U_p} \text{ }^\circ\text{C/W c'est l'unité d'une résistance thermique}$$

$R_E$  = résistance à l'encrassement

$$\frac{1}{S \cdot U_s} = \frac{1}{S \cdot U_p} + R_E$$

$$R_E = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/W}$$

2°) De l'eau s'écoule à une vitesse moyenne de 1,5 m/s dans une canalisation de diamètre intérieur de 25 mm et de longueur  $L = 2,5$  m.

L'extérieur du tube est maintenu, sur toute sa longueur, à une température constante de 47°C. La résistance de conductivité de la paroi métallique du tube peut être négligée. La température de l'eau à l'entrée du tube est de 20°C, tandis que la température mesurée en sortie est de 22 °C.

a°) Calculez la puissance thermique effectivement transférée à l'eau. La masse volumique de l'eau sera prise égale à 1000 kg/m<sup>3</sup>, et la chaleur spécifique à 4180 j/kg°C.

b°) En déduire le coefficient global de transfert de chaleur effectif

c°) Compte tenu de la faible température de sortie de l'eau mesurée, on fait l'hypothèse de l'existence d'un encrassement, déposé sur la paroi interne du tube, créant ainsi une résistance supplémentaire.

On cherche tout d'abord à justifier cette hypothèse en calculant le coefficient global de transfert thermique qu'aurait le tube s'il était propre. Ce coefficient peut être calculé pour l'eau, par la relation suivante, en prenant en compte les dépendances des propriétés thermo-physique de l'eau avec la température:

$$U = 1063(1 + 0,00293(t + 273))v^{0,8} \cdot D^{-0,2} \quad \text{en } w/^{\circ}\text{Cm}^2$$

$V$  = vitesse de l'eau

$D$  = diamètre intérieur du tube

$t$  = température de l'eau

Calculez le coefficient global de transfert de chaleur en prenant une température moyenne de l'eau égale à  $t = 27$  °C. Comparez cette valeur à celle trouvée pour le coefficient global de transfert de chaleur effectif. Concluez ?

d°) En déduire la résistance  $R$  d'encrassement créée par le dépôt interne (précisez les unités)

e°) En admettant que ce dépôt est constitué d'un matériau minéral de conductivité thermique

$\lambda = 1,5$  w/m°C, calculez l'épaisseur  $e$  du dépôt existant sur la paroi interne du tube.

a°) La puissance thermique effectivement transférée à l'eau

$$\phi = qv' \cdot \rho \cdot cp' (\theta'2 - \theta'1) = [1,5\pi(25 \cdot 10^{-3})1000 \cdot 4180 \cdot (22 - 20)] / 4 = \mathbf{6152,44 \text{ w}}$$

b°) le coefficient global de transfert de chaleur effectif

$$(\Delta\theta)_m = \mathbf{25,987 \text{ }^\circ\text{C}}$$

$$\phi = U_s S (\Delta\theta)_m \quad U_s = \phi / \pi D L (\Delta\theta)_m = 6152,44 / 3,14 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 25,987 =$$

$$\mathbf{U_s = 1205,77 \text{ w/m}^2\text{ }^\circ\text{C}}$$

c°) le coefficient global de transfert de chaleur propre

$$U_p = 1063[1 + 0,00293(27 + 273)] v^{0,8} \cdot D^{-0,2} = \mathbf{5777,57 \text{ w/m}^2\text{ }^\circ\text{C}}$$

L'hypothèse de l'**encrassement est vérifiée** puisque le coefficient global de transfert de chaleur propre ( $U_p$ ) est supérieur au coefficient global de transfert de chaleur effectif ( $U_s$ )

d°) La résistance **R** d'encrassement :

$$\frac{1}{SU_s} = \frac{1}{SU_p} + \mathbf{R} \quad ; \quad \mathbf{R} = \frac{1}{SU_s} - \frac{1}{SU_p} = \mathbf{3,88 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/w}}$$

e°) L'épaisseur **e** du dépôt

$$\mathbf{R} = \frac{\ln \frac{D/2}{\frac{D}{2} - ep}}{2\pi L \lambda} = \frac{\ln \frac{(25 \cdot 10^{-3})/2}{\frac{25 \cdot 10^{-3}}{2} - ep}}{2\pi \cdot 2,5 \cdot 1,5}$$

$$\mathbf{ep = 0,945 \text{ mm}}$$

## 9°) Algorithme de calcul d'un échangeur de chaleur

